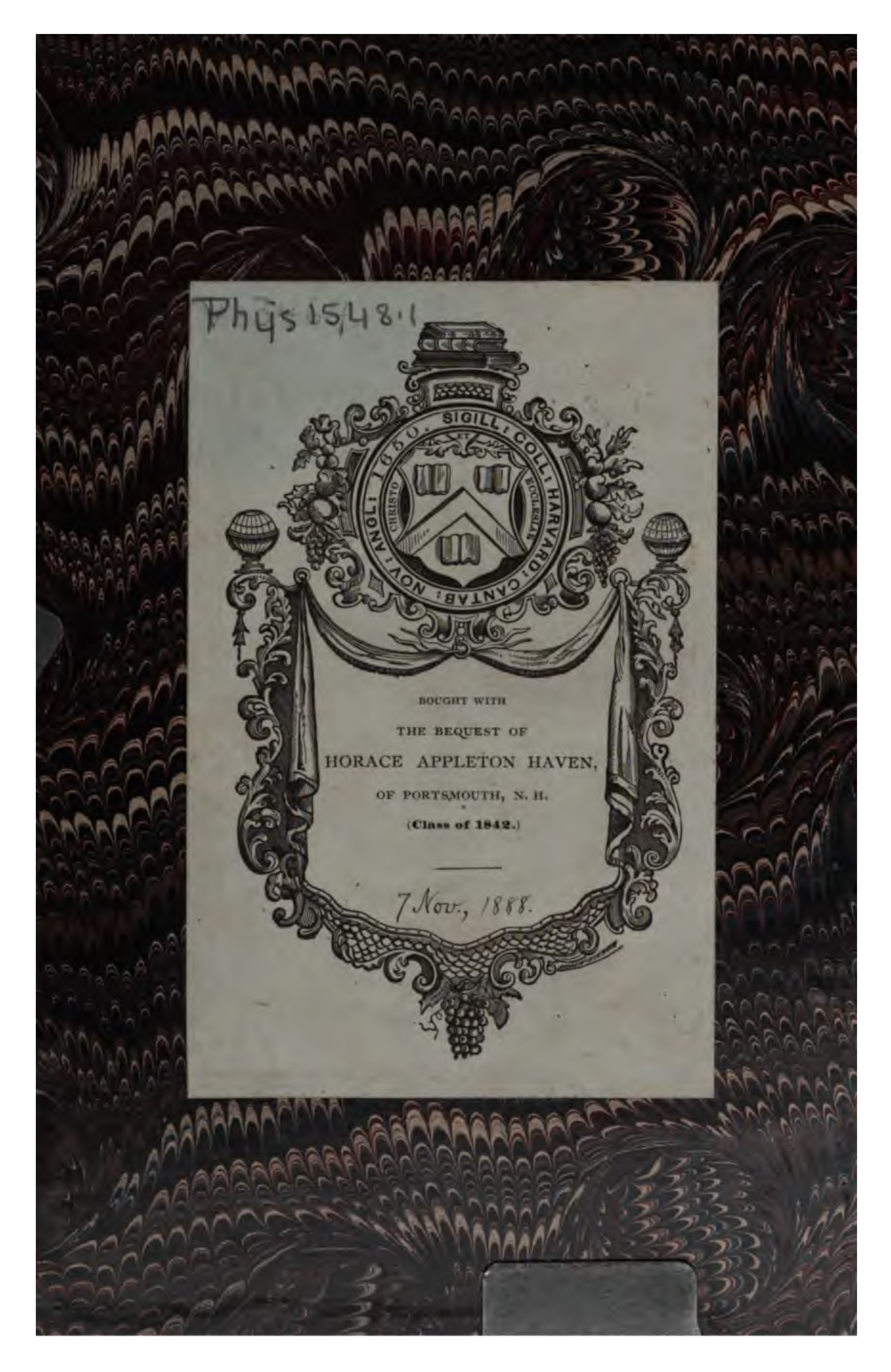





Phys 1548.1
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
7 Nov., 1888.

HYDRODYNAMISCHE

UNTERSUCHUNGEN

NEBST EINEM ANHANGE ÜBER DIE

PROBLEME DER ELEKTROSTATIK

UND DER

MAGNETISCHEN INDUCTION.

VON

DR. C. NEUMANN,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Mit den vorliegenden Untersuchungen bin ich mehrere Jahre hindurch ziemlich anhaltend beschäftigt gewesen, wobei mir, hinsichtlich der neueren Literatur, nur die Aufsätze von *Clebsch*, *Helmholtz*, *Kirchhoff* und *Boltzmann* bekannt waren. Als ich dann später, im Januar dieses Jahres 1883, den *Report* von *W. M. Hicks**), in Folge einer gütigen Zusendung des Herrn Verfassers, kennen lernte, war mein Werk nach langer anstrengender Arbeit im Manuscript bereits der Hauptsache nach vollendet, ein grosser Theil davon auch schon gedruckt; sodass ich das Werk einer nochmaligen Umarbeitung, mit Berücksichtigung der in jenem *Report* erwähnten Arbeiten von *Stokes*, *Thomson*, *Tait* und *Hicks*, zu unterwerfen ausser Stande war. Dagegen will ich hier in der Einleitung nicht unterlassen, jenen durch Uebersichtlichkeit und Reichhaltigkeit ausgezeichneten *Report* in gebührender Weise zu benutzen, und die daselbst erwähnte Literatur, soweit sie auf die von mir behandelten Themata Bezug hat, zu besprechen.

Das vorliegende Werk besteht im Ganzen aus *fünf Abschnitten* und einem *Anhange*, von deren Inhalt ich hier vorläufig ein ungefähres Bild zu geben beabsichtige.

Erster Abschnitt (p. 1—92).

Unter einer *idealen* oder *perfecten* incompressiblen Flüssigkeit pflegt man eine solche zu verstehen, bei welcher die (innere und äussere) Reibung *Null* ist. Denken wir uns nun eine derartige Flüssigkeit von irgend welchen Wänden eingeschlossen, die ihrerseits in beliebigen Bewegungen begriffen sind, und nehmen wir an, dass auf diese Flüssigkeit, ausser dem Druck der Wände, noch irgend welche anderweitigen Kräfte einwirken, deren Potential $V = V(x, y, z)$ *gegeben* ist, so gelten für die Bewegung der Flüssigkeit folgende Differentialgleichungen:

*) *Report on recent progress in hydrodynamics, by W. M. Hicks;* erschienen in den *Brit. Assoc. Reports, 1881, 1882.*

$$
(1.)\quad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{m}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -m\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{m}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= -m\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{m}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}
$$
(vgl. p. 13).

Jene die Flüssigkeit begrenzenden, in Bewegung begriffenen Wände sollen von beliebiger Beschaffenheit sein; sie werden im Allgemeinen also dargestellt sein durch irgend welche Anzahl geschlossener Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, von denen die eine die Flüssigkeit *von Aussen her* begrenzt, während die andern *innere* Begrenzungsflächen repräsentiren. Diese Flächen mögen, ihrer *Lage* und *Gestalt* nach, von Augenblick zu Augenblick sich ändern, also den Charakter *elastischer Membranen* besitzen, übrigens aber der Art sich bewegen, dass sie die gegebene incompressible Flüssigkeit fortdauernd *vollständig umschliessen*; sodass also der von ihnen begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ seinem Volumen nach *constant* bleibt.

Um diese *bekannte* oder *unbekannte* Bewegung der Wände der analytischen Behandlung zugänglich zu machen, denken wir uns die *augenblickliche Position* der Wände (ihre Lage und Gestalt) abhängig von irgend welchen *Parametern**) $\alpha, \beta, \ldots$, die ihrerseits *bekannte* oder *unbekannte* Functionen der Zeit sind. Ueberdiess setzen wir beständig voraus, dass der *Anfangszustand* der Flüssigkeit *wirbelfrei sei*, d. i. *ein Geschwindigkeitspotential besitze.* Diese Eigenschaft wird alsdann permanent vorhanden sein, der Art, dass auch im weiteren Verlauf der Bewegung *fortdauernd* ein solches Potential existirt [p. 15].

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Bewegung der Flüssigkeit, namentlich ihr *Geschwindigkeitspotential* Φ und ihre *lebendige Kraft* T zu berechnen, oder wenigstens die allgemeinen Regeln darzulegen, nach denen eine solche Berechnung in jedem speciellen Fall zu effectuiren ist. Und gleichzeitig stellen wir uns die Aufgabe, die *Druckkräfte*, mit denen die Flüssigkeit, während der betrachteten Bewegung, auf die umschliessenden Wände einwirkt, näher zu untersuchen. Namentlich wollen wir dabei die *Arbeit* dieser Druckkräfte zu berechnen suchen, sowohl ihre *wirkliche*, wie auch ihre *virtuelle* Arbeit.

Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials und der lebendigen Kraft der Flüssigkeit. — Auf Grund der schon genannten Vorstellungen und Voraussetzungen ergeben sich zuvörderst folgende Sätze: Ist der von

*) Vgl. die den Begriff der Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ erläuternden Beispiele auf p. 9 dieses Werkes.

der Flüssigkeit erfüllte Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend, und die Bewegung der Wände *gegeben*, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit (auch ohne weitere Kenntniss ihres Anfangszustandes) bereits völlig bestimmt sein [vgl. p. 27]. Ist hingegen jener Raum $\mathfrak{R}$ ein *mehrfach* zusammenhängender, und die Bewegung der Wände wiederum *gegeben*, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit erst dann vollständig bestimmt sein, wenn ausserdem noch gewisse den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirende Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ gegeben sind [p. 31]. Diese $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ repräsentiren, beiläufig bemerkt, die Werthdifferenzen, mit denen das Geschwindigkeitspotential Φ der Flüssigkeit in den sogenannten *Querschnitten* des Raumes $\mathfrak{R}$ behaftet ist.

Offenbar kann man den zuletzt genannten Satz unter Anwendung der Geschwindigkeitscomponenten:

$$(2.) \qquad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

auch so aussprechen:

(3.) *Ist $\mathfrak{R}$ mehrfach zusammenhängend, und betrachtet man die* (vorhin genannten) *Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ als gegebene Functionen der Zeit, ferner die den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirenden Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ als gegebene Constanten, so werden hierdurch die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w der Flüssigkeit für die ganze Dauer der Bewegung vollständig bestimmt sein* [p. 31].

Gleichzeitig ergeben sich für das *Geschwindigkeits-Potential* Φ und für die *lebendige Kraft T der Flüssigkeit* folgende Ausdrücke:

$$(4.) \qquad \Phi = \Phi_0 + \left[\Phi_1 \frac{d\alpha}{dt} + \Phi_2 \frac{d\beta}{dt} + \cdots\right], \qquad \text{(p. 39)},$$

$$(5.) \qquad T = \Theta_0 + \left[\Theta_{11} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\Theta_{12} \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right], \qquad \text{(p. 45)},$$

wo $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ von $x, y, z, \alpha, \beta, \ldots$, hingegen $\Theta_0, \Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots$ nur von $\alpha, \beta, \ldots$ abhängen*). Die Zeit kommt in diesen Functionen nur insofern vor, als sie Argument der $\alpha, \beta, \ldots$ ist. Ueberdiess sind Φ_0 und Θ_0 mit den Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ behaftet, hingegen Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ und $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots$ von denselben unabhängig.

---

*) Bei diesen Angaben sind die in $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ enthaltenen *additiven Glieder*, welche lediglich von der Zeit abhängen, und für unsere Theorie völlig indifferent sind, als *fortgelassen* zu betrachten. Vgl. p. 40.

Auch findet man im vorliegenden Werk die allgemeinen Bedingungen angegeben, mittelst deren die Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... *sich bestimmen* [vgl. (B_0.), (B_1.), (B_2.) etc. p. 39], *desgleichen die einfachen Formeln, mittelst deren sich die Werthe von* Θ_0, Θ_{11}, Θ_{12}, ... *aus denen der Functionen* Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... *ableiten lassen* [vgl. (4.) p. 45]. Es würde zu weit führen, diese Bedingungen und Formeln hier von Neuem zu wiederholen. Hingegen mag noch auf gewisse an V und Φ_0 sich *anschliessende* Grössen W, A, B, ... aufmerksam gemacht werden, welche durch folgende Formeln definirt sind*):

$$(6.)\qquad W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz, \qquad \text{(p. 13)},$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} A = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} dx dy dz, \\ B = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} dx dy dz, \qquad \text{(p. 59)}, \\ \qquad \text{etc. etc. etc.,} \end{cases}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $dxdydz$ des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes $\mathfrak{R}$. Das in (6.) eingeführte W wird offenbar zu bezeichnen sein als das von den äusseren Kräften (deren Potential V ist) auf die Flüssigkeit ausgeübte *Gesammtpotential.*

Aus den über die Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... und Θ_0, Θ_{11}, Θ_{12}, ... bei (4.), (5.) gemachten Angaben, so wie aus der Bildungsweise der Functionen W (6.) und A, B, ... (7.) ergeben sich sofort folgende Bemerkungen:

$$(7.\text{a})\qquad \begin{cases} \begin{cases} V \text{ hängt ab von } x, y, z, \\ W \text{ hängt ab von den Parametern } \alpha, \beta, \ldots \end{cases} \\ \begin{cases} \Phi_0 \text{ hängt ab von } x, y, z, \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots \\ \Phi_1, \Phi_2, \ldots \text{ hängen ab von } x, y, z, \alpha, \beta, \ldots \end{cases} \\ \begin{cases} \Theta_0 \text{ und } A, B, \ldots \text{ hängen ab von } \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots \\ \Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots \text{ hängen ab von } \alpha, \beta, \ldots \end{cases} \\ T \text{ hängt ab von } \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots \end{cases}$$

Dabei ist hinzuzufügen, dass Φ_0 und Θ_0, also nach (7.) auch A, B, ... *identisch verschwinden* für den speciellen Fall eines *einfach* zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ [p. 64].

Die durch den Druck der Flüssigkeit auf die umgebenden Wände ausgeübte Arbeit. — Bezeichnet man die von der Flüssigkeit auf die Wände ausgeübten Druckkräfte mit p, und versteht man unter

$$(8.)\qquad \delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \ldots$$

*) Dabei bezeichnet ϱ [ebenso wie in (1.)] die *constante Dichtigkeit* der incompressiblen Flüssigkeit.

diejenige *virtuelle Arbeit*, welche diese Kräfte p leisten *würden*, falls man die Wände aus der Position (α, β, ...) in die Position ($\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$, ...) übergehen lassen wollte, so handelt es sich darum, die Werthe von L_1, L_2, ... zu berechnen, oder wenigstens die allgemeinen Regeln zu entwickeln, nach denen diese L_1, L_2, ... in jedem speciellen Fall berechnet werden *können*.

Nimmt man in der Formel (8.) für $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... diejenigen Zuwüchse $d\alpha$, $d\beta$, ..., welche die Parameter α, β, ... während des Zeitelementes *dt in Wirklichkeit* erfahren, so erhält man an Stelle der virtuellen Arbeit jener Kräfte ihre *wirkliche Arbeit*:

$$dL = L_1 d\alpha + L_2 d\beta + \dots \tag{9.}$$

Diese letztere bestimmt sich leicht. Multiplicirt man nämlich die drei Differentialgleichungen (1.) respective mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, und addirt, und summirt man schliesslich die so erhaltene Formel über sämmtliche Flüssigkeitstheilchen m, so erhält man nach einfachen Reductionen für die Arbeit dL den Werth:

$$dL = -d(T + W), \qquad \text{[vgl. p. 37]}, \tag{10.}$$

wo T und W die schon genannten Bedeutungen (5.), (6.) haben, und $d(T + W)$ den Zuwachs von $(T + W)$ während des Zeitelementes dt vorstellt.

Was andererseits die Berechnung der *virtuellen* Arbeit δL (8.), d. i. die Berechnung von L_1, L_2, ... betrifft, so ist folgender Satz [der eine Erweiterung des Satzes (3.) repräsentirt] voranzuschicken:

(11.) *Ist der Raum $\mathfrak{R}$ mehrfach zusammenhängend, und betrachtet man die Parameter α, β, ... als gegebene Functionen der Zeit, ferner die den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirenden Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... als gegebene Constanten, so werden hiedurch die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w der Flüssigkeit, und ebenso auch die Werthe der L_1, L_2, ... für die ganze Dauer der Bewegung vollständig bestimmt sein* [vgl. p. 31, 32].

Zur wirklichen Berechnung der L_1, L_2, ... dient folgendes Verfahren: Neben der *wirklichen* Bewegung des Systems, welche auf Grund der gegebenen Functionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ... und der gegebenen Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... völlig bestimmt ist, betrachten wir gleichzeitig eine gewisse *fingirte* Bewegung des Systems, welche von genau demselben Anfangszustande ausgeht, also mit denselben Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... behaftet sein soll, wie die wirkliche Bewegung. Ueberhaupt soll diese fingirte Bewegung von der wirklichen sich nur dadurch

unterscheiden, dass bei ihr an Stelle der gegebenen Functionen $\alpha, \beta, \ldots$ etwas andere Functionen $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta, \ldots$ gedacht werden. Auch sollen die Unterschiede $\delta\alpha$, $\delta\beta$; ... der Art sein, dass sie sowohl zur Zeit t_0 des Anfangszustandes, wie auch in irgend einem (willkührlich zu wählenden) späteren Zeitaugenblick t_1 *verschwinden.*

Der Bezeichnungsweise $\delta\alpha$, $\delta\beta, \ldots$ entsprechend mögen die Coordinaten irgend eines Flüssigkeitstheilchens m zur Zeit t, bei der *wirklichen* Bewegung mit x, y, z, bei der *fingirten* mit $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ benannt werden. Multiplicirt man nun die Gleichungen (1.) respective mit $\delta x, \delta y, \delta z$, und addirt, so erhält man:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = -m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \cdots\right) - \frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \cdots\right),$$

oder falls man über den Raum $\mathfrak{R}$, d. i. über alle Theilchen m der gegebenen Flüssigkeit summirt:

$$\sum_{\mathfrak{R}} m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \cdots\right) = -\sum_{\mathfrak{R}} m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \cdots\right) - \sum_{\mathfrak{R}} \frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \cdots\right),$$

(p. 47). Diese letzte Formel kann man mittelst leicht sich ergebender Transformationen in folgende Gestalt versetzen:

$$\text{(12.)} \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \delta(T - W) - \delta L, \qquad \text{(p. 52)},$$

wo δL *die zu berechnende virtuelle Arbeit* (8.) vorstellt, während T und W die in (5.), (6.) genannten Bedeutungen haben, und Ω zur augenblicklichen Abkürzung gesetzt ist für den Ausdruck:

$$\Omega = \sum_{\mathfrak{R}} m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right), \qquad \text{(p. 52)}.$$

Differenzirt man dieses Ω nach der Zeit, so ergiebt sich nach mannigfaltigen Umgestaltungen:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \delta\left(2\Theta_0 + A\frac{d\alpha}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) + \frac{d(M + \mathsf{M})}{dt}, \quad \text{(p. 60)},$$

wo Θ_0, A, B, ... die in (5.), (7.) genannten Bedeutungen haben, während M und M zwei Ausdrücke vorstellen, die im Augenblick t_0, und ebenso im Augenblick t_1 *verschwinden.* Substituirt man also diesen Werth von $\frac{d\Omega}{dt}$ in der Formel (12.), und integrirt man sodann diese Formel nach der Zeit von t_0 bis t_1, so ergiebt sich:

$$\text{(13.)} \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\left(2\Theta_0 + A\frac{d\alpha}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) - \delta(T - W) + \delta L\right]dt = 0,$$

oder kürzer geschrieben:

$$(14.)\qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta L - \delta f) dt = 0, \qquad \text{(p. 60)},$$

wo alsdann f die Bedeutung hat:

$$(15.)\qquad f = T - W - 2\Theta_0 - \left(A \frac{d\alpha}{dt} + B \frac{d\beta}{dt} + \cdots\right);$$

so dass also [vgl. (7. a)] dieses

$$(15.\,a)\qquad f \text{ abhängig ist von } \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots\ \alpha, \beta, \ldots\ \varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$$

Substituirt man für δL den Ausdruck (8.), so entspringen aus der Formel (14.) nach bekannter Methode folgende Gleichungen:

$$(16.)\qquad \begin{cases} L_1 = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha'}, & \text{wo } \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ L_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \beta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial \beta'}, & \text{wo } \beta' = \dfrac{d\beta}{dt}, \\ \quad \text{etc. etc. etc.} & \text{[p. 61].} \end{cases}$$

Und substituirt man schliesslich für f seine eigentliche Bedeutung (15.), so nehmen die Formeln (16.) die Gestalt an:

$$(16.\,a)\ \begin{cases} L_1 = \dfrac{\partial(T - W - 2\Theta_0)}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \alpha'} + \left[\left(\dfrac{\partial A}{\partial \beta} - \dfrac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\beta' + \left(\dfrac{\partial A}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial C}{\partial \alpha}\right)\gamma' + \cdots\right]. \\ L_2 = \text{etc. etc. etc.} \quad \text{[p. 63].} \end{cases}$$

Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst. Will man nämlich L_1, L_2, ... *wirklich berechnen, so hat man zuvörderst die Functionen* Φ, T, Θ_0, A, B, ... *und* W *nach den in* (4.), (5.), (6.), (7.) *angedeuteten Regeln und Formeln zu bestimmen. Solches ausgeführt, ergeben sich alsdann die Werthe der* L_1, L_2, ... *mittelst der Formeln* (16. a).

Man kann füglich die Gleichung (10.) als die des *Princips der lebendigen Kraft*, und ebenso die Formel (14.) als die des *Hamilton-schen Princips* bezeichnen.

Die Formeln (13.), (14.), (15.), (16.), (16. a) habe ich im vorliegenden Werk nachträglich noch einer gewissen *Verification* [p. 65—75] unterworfen. Im Grunde genommen liefert diese Verification eine *neue* Methode zur Ableitung der Formeln, und (beiläufig bemerkt) eine Methode, die ich *früher* gefunden hatte, als die soeben hier angedeutete, an das Hamilton'sche Princip sich anlehnende Methode. Vgl. p. 12.

Die Bewegung starrer Körper in der Flüssigkeit. — Den Schluss des ersten Abschnitts (p. 76—92) bilden einige *sehr einfache* Untersuchungen von ganz speciellem Charakter, auf welche ich hier nicht

weiter eingehen will. Statt dessen benutze ich die Gelegenheit zur Hinzufügung einer gewissen *allgemeinen Betrachtung.*

Die Flüssigkeit sei begrenzt von $(n+1)$ starren Körpern $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$. Der Körper $\mathfrak{K}_0$ habe nämlich eine schaalenförmige Gestalt; und innerhalb dieser Schaale befinde sich die Flüssigkeit; während gleichzeitig innerhalb der Flüssigkeit die übrigen Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n$ wie einzelne Inseln enthalten sind. All' diese $(n+1)$ starren Körper seien in beliebiger Bewegung begriffen, sodass also die Flüssigkeit von $(n+1)$ starren Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ begrenzt ist, deren absolute und relative Lage von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Ebenso wie früher mögen die Parameter, von denen die augenblickliche Position dieser $(n+1)$ Flächen abhängt, mit $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet sein; sodass also die Anzahl dieser Parameter $= 6(n+1)$ oder $< 6(n+1)$ sein wird, je nachdem die Beweglichkeit der Körper eine *freie*, oder aber eine durch gegebene Bedingungen *beschränkte* ist.

Hält man, hinsichtlich der Flüssigkeit, an den früher gemachten Voraussetzungen und Bezeichnungen fest, so erhält man nach wie vor die Formel (14.):

$$(17.) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta f - \delta L)\, dt = 0,$$

wo f die in (15.) eingeführte Abbreviatur ist, während δL die virtuelle Arbeit der von der Flüssigkeit auf die Körper ausgeübten Druckkräfte vorstellt.

Wir können nun aber andererseits das Hamilton'sche Princip, in seiner *bekannten gewöhnlichen Form*, unmittelbar *auf die gegebenen* $(n+1)$ *starren Körper* anwenden, und erhalten alsdann folgende zweite Formel:

$$(18.) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathfrak{T} + \delta \mathfrak{S} + \delta L)\, dt = 0.$$

Hier repräsentirt δL [ebenso wie in (17.)] die virtuelle Arbeit der von der Flüssigkeit auf die Körper ausgeübten Druckkräfte, ferner $\delta \mathfrak{S}$ die virtuelle Arbeit *aller sonstigen auf die Körper einwirkenden Kräfte*, endlich $\mathfrak{T}$ die *lebendige Kraft der Körper*. Durch Addition von (17.) und (18.) folgt:

$$(19.) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta f + \delta \mathfrak{T} + \delta \mathfrak{S})\, dt = 0.$$

Aus dieser Formel aber entspringen, falls man

$$(20.) \qquad \delta \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \delta\alpha + \mathfrak{S}_2 \delta\beta + \cdots$$

setzt, nach bekannter Methode folgende Differentialgleichungen:

$$(21.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial(f+\mathfrak{T})}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(f+\mathfrak{T})}{\partial\alpha'} + \mathfrak{S}_1 = 0, \text{ wo } \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \\ &\frac{\partial(f+\mathfrak{T})}{\partial\beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(f+\mathfrak{T})}{\partial\beta'} + \mathfrak{S}_2 = 0, \text{ wo } \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

d. i. ebenso viele Differentialgleichungen, als Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ vorhanden sind. Sind nun jene auf die Körper einwirkenden Kräfte (deren Arbeit mit $\delta\mathfrak{S}$ bezeichnet wurde) *gegeben*, mithin die Grössen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ ebenfalls *gegeben*, so bestimmen sich mittelst dieser Differentialgleichungen die Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ als Functionen der Zeit. Mit andern Worten: *Die Formeln* (21.) *repräsentiren diejenigen Differentialgleichungen, von denen die Bewegung der betrachteten Körper beherrscht wird.* Will man eine deutliche Vorstellung von der Beschaffenheit dieser Gleichungen haben, so braucht man sich nur zu erinnern an die Bedeutung des Ausdruckes f. Vgl. (15.) und (15. a.).

Uebrigens kann man, um die Bewegung der Körper zu bestimmen, ausser den Differentialgleichungen (21.) auch noch *das Princip der lebendigen Kraft* anwenden. Dieses nämlich liefert nach (10.) bei seiner Anwendung auf die *Flüssigkeit* die Formel:

$$(22.)\qquad d(T+W) = -\,dL,$$

und andererseits bei seiner Anwendung auf die *Körper* die Formel:

$$(23.)\qquad d\mathfrak{T} = d\mathfrak{S} + dL;$$

woraus durch Addition folgt:

$$(24.)\qquad d(\mathfrak{T}+T+W) = d\mathfrak{S}, \quad \text{d. i.} = \mathfrak{S}_1 d\alpha + \mathfrak{S}_2 d\beta + \cdots,$$

— eine Gleichung, die sich leicht erweisen lässt als eine unmittelbare Consequenz der Differentialgleichungen (21.)

Specielle Fälle. — Ist der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend, so werden $\Theta_0, A, B, \ldots$ sämmtlich $= 0$ [vgl. p. 64]; so dass also der Ausdruck f (15.) in diesem Fall übergeht in $(T - W)$; wodurch die Formeln (19.), (24.) die einfachere Gestalt erhalten:

$$(25.)\quad \begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}[\delta(T-W) + \delta\mathfrak{T} + \delta\mathfrak{S}]dt = 0, \\ &d(\mathfrak{T}+T+W) = d\mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Setzt man überdiess voraus, dass von Aussen her *keinerlei* Kräfte einwirken weder auf die Flüssigkeit noch auf die Körper, dass mithin V, W, $\delta\mathfrak{S}$, $d\mathfrak{S}$ *Null* sind, so gehen die Formeln (25.) über in:

(26.) $$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(\mathfrak{T} + T)]\, dt = 0,$$
$$d(\mathfrak{T} + T) = 0, \text{ d. i. } \mathfrak{T} + T = \text{Const.}$$

Die Untersuchungen von Thomson und Tait. — Nachdem *Hicks* in seinem schon genannten *Report* die Arbeiten von *Dirichlet*, *Clebsch* und *Helmholtz* erwähnt hat, sagt er daselbst (1881, p. 4):

The next great advance in theory was due to the publication in 1867 of Thomson and Tait's „Natural Philosophy". Here, for the first time Lagrange's equations of motion were applied, though without any direct proof that the equations were applicable to cases in which there is an infinite degree of freedom and in which a portion of the generalised coordinates to not appear. Objections were raised by several mathematicians to this application, amongst whom may be mentioned Purser [Phil. Mag. (5.), Vol. 6, p. 354] *and Boltzmann* [Crelle's Journal, Bd. 73]. Dabei sei mir erlaubt zu bemerken, dass der Boltzmann'sche Einwand diesen Worten des Hicks'schen Report *nicht* vollständig entspricht. Vielmehr zeigt Boltzmann [l. c. p. 128], dass jene von Thomson und Tait gemachte Anwendung der Lagrange-Hamilton-Jacobi'schen Formeln völlig correct sei für den Fall, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum *einfach* zusammenhängt, dass jene Anwendung hingegen zweifelhafter Natur sei für den Fall eines *mehrfach* zusammenhängenden Raumes.

Sodann heisst es weiter in dem Hicks'schen *Report**): *In the second edition (of the „Natural Philosophy"), published in 1879, this question was considered under a general theory of „Ignoration of coordinates". Starting with the expression for the energy containing all the generalised velocities, the generalised equations for the coordinates ignored are written down and integrated once on the supposition that the force-components corresponding to the ignored coordinates do not occur. These give a number of equations, containing the velocities, equal in number to the ignored coordinates, and of the form:*

(linear function of the velocities) = Const.

By means of these, therefore, the ignored coordinates can be eliminated from the expression for the energy. This is done, and Lagrange's equations for the non-ignored coordinates are transformed to apply to the energy as

*) Ich glaube mich hier auf die *letzte* der betreffenden Thomson'schen Publicationen, von 1879, auf welche in dem Hicks'schen Report (1881, p. 4) *vorzugsweise Gewicht gelegt wird*, beschränken zu dürfen. Die ausserdem noch in jenem Report (1881, p. 16, 17) erwähnten, diesen Gegenstand betreffenden Thomson'schen Aufsätze datiren aus *früheren* Jahren: 1860, 64, 71, 72.

expressed in the new form. Naturally this is more complicated than the ordinary Lagrangian form. But when we have to do with fluid motion, where the motion commences from rest, or can be brought to rest without application of force-components corresponding to the ignored coordinates, the constants introduced in the first integration are all zero. When this is the case the transformed Lagrangian equations reduce to the ordinary form.

Ich habe diese Stelle des *Hicks*'schen *Report* hier wörtlich mitgetheilt, hauptsächlich deswegen, weil es mir zu meinem Bedauern nicht gelungen ist, von der betreffenden *Thomson-Tait*'schen Theorie ein deutliches Bild zu gewinnen. Es mag mir gestattet sein, meine *Bedenken* gegen diese Theorie hier in Kürze mitzutheilen.

Thomson und Tait (*Natural Philosophy* 1879, p. 320—324) denken sich die lebendige Kraft $(\mathfrak{T} + T)$ des ganzen Systems ausgedrückt durch $\alpha, \beta, \ldots$ und durch gewisse *ignored coordinates* $\chi, \chi_1, \ldots$, sowie durch die Ableitungen von $\alpha, \beta, \ldots \chi, \chi_1, \ldots$ nach der Zeit*); der Art, dass die *Lagrange*'schen Differentialgleichungen die Gestalt annehmen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\alpha'} - \frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\alpha} = \mathsf{A}, \quad \text{wo } \alpha' = \frac{d\alpha}{dt},$$

etc. etc.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\chi'} - \frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\chi} = \mathsf{X}, \quad \text{wo } \chi' = \frac{d\chi}{dt},$$

etc. etc.

Hinsichtlich jener *ignored coordinates* $\chi, \chi_1, \ldots$ wird von Thomson und Tait zweierlei verlangt (l. c. p. 320), nämlich:

I. dass die lebendige Kraft $(\mathfrak{T} + T)$ nur die *Ableitungen* der $\chi, \chi_1, \ldots$ nach der Zeit, nicht aber diese selber enthält, dass mithin z. B. $\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\chi} = 0$ sei.

II. dass die den *ignored coordinates* $\chi, \chi_1, \ldots$ *entsprechenden force-components* $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \ldots$ *gleich Null* seien.

Wie soll man aber diesen beiden Anforderungen gleichzeitig entsprechen, selbst wenn man mit Thomson und Tait voraussetzt, dass *keine* äusseren Kräfte einwirken? — Nimmt man für $\chi, \chi_1, \ldots$ geradezu

*) Der Continuität willen halte ich hier an *meinen* Bezeichnungen fest, indem ich bemerke, dass die lebendige Kraft $(\mathfrak{T} + T)$, ferner die Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ endlich die Grössen $\chi, \chi_1, \ldots$ von *Thomson* und *Tait* respective mit T, ferner mit $\psi, \varphi, \ldots$, endlich mit $\chi, \chi', \ldots$ bezeichnet sind.

die rechtwinkligen Coordinaten der einzelnen Flüssigkeitsmolecüle, so ist die Anforderung I. allerdings erfüllt. Es würden dann aber die einzelnen Flüssigkeitsmolecüle als *völlig frei beweglich* betrachtet werden; so dass man also die Incompressibilität als die Wirkung irgend welcher innerer Kräfte anzusehen hätte. Und diese letzteren müssten alsdann also mit in Rechnung gebracht werden, wodurch sich für X, $\mathsf{X}_1, \ldots$ *gewisse Werthe* ergeben würden; — was der Anforderung II. widerspricht.

Nun kann man allerdings die Incompressibilität auch in *anderer* Weise auffassen, sie nämlich ansehen als das Resultat gewisser zwischen den Coordinaten der Flüssigkeitsmolecüle stattfindenden *Bedingungsgleichungen*. Alsdann hätte man in den *Lagrange*'schen Gleichungen für χ, $\chi_1, \ldots$ diejenigen independenten Variablen zu nehmen, durch welche diese Bedingungsgleichungen *identisch* erfüllt werden. Und bei dieser Sachlage würden alsdann die X, $\mathsf{X}_1, \ldots$ in der That $= 0$ sein, mithin würde der Anforderung II. entsprochen werden. Andererseits aber würde alsdann die lebendige Kraft $(\mathfrak{T} + T)$ nicht nur mit den *Ableitungen* der χ, $\chi_1, \ldots$ nach der Zeit, sondern auch mit diesen selber behaftet sein; was der Anforderung I. widerspricht.

Der zweite Abschnitt (p. 93—142)

handelt von der Bewegung einer Kugel im Innern einer Flüssigkeit, welche auf einer Seite von einer *festen Ebene* begrenzt ist, nach allen übrigen Seiten aber ins Unendliche sich ausdehnt. Dabei ist die Flüssigkeit im Unendlichen von einer *festen Fläche* begrenzt zu denken; so dass also ihre vollständige Begrenzung am einfachsten etwa bestehend gedacht werden kann einerseits aus der *festen Ebene* selber, und andererseits aus einer um irgend welchen Punct o dieser Ebene mit unendlich grossem Radius beschriebenen Halbkugelfläche.

Die feste Ebene wird zur yz-Ebene, und ihre in o errichtete, in die Flüssigkeit hineinlaufende Normale zur x-Axe gewählt. Auch wird der Einfachheit willen vorausgesetzt, dass die Kugel nur sich selber parallel längs eines *festen Geleises* beweglich ist, der Art, dass ihr Centrum c beständig auf der x-Axe bleibt. (Vgl. die Note p. 77.)

Wir stellen uns nun zuvörderst die Aufgabe, die Bewegung der Flüssigkeit für *den* Fall zu berechnen, dass die Bewegung der Kugel eine *vorgeschriebene*, mithin die x-Coordinate ihres Centrums c eine *gegebene* Function der Zeit ist. Dabei mag angenommen werden, dass auf die Flüssigkeit selber von Aussen her irgend welche Kräfte einwirken, deren Potential V eine gegebene Function der Coordinaten ist.

Die unter diesen Umständen für das Geschwindigkeitspotential Φ sich ergebenden Bedingungen sind von der Function $V = V(x, y, z)$ *völlig unabhängig* [p. 116]. Und demgemäss ergiebt sich, dass dieses Φ, und ebenso auch die Bewegung der Flüssigkeit *symmetrisch ist zur x-Axe.* Hieraus folgt sofort, dass die Resultante der von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübten Druckkräfte in die Linie der x-Axe fällt. Die weitere Rechnung zeigt sodann, dass die *lebendige Kraft T der Flüssigkeit* und jene soeben genannte *Resultante* X^p Werthe von folgender Form besitzen:

$$(1.) \qquad T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2, \quad [(49.)\ \text{p. } 136],$$

$$(2.) \qquad X^p = -X^j + \mathfrak{A}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \mathfrak{B}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}, \quad [(64.)\ \text{p. } 140],$$

wo das deutsche $\mathfrak{x}$ die x-Coordinate des Centrums c vorstellt. Dabei bezeichnen F, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Functionen von $\mathfrak{x}$, welche, ausser von $\mathfrak{x}$, nur noch von zwei *Constanten* abhängen, nämlich vom Radius R der Kugel, und von der Dichtigkeit ϱ der incompressiblen Flüssigkeit. Ausserdem repräsentirt X^j die dem Princip des *Archimedes* entsprechende Kraft, nämlich die x-Componente derjenigen Wirkung, welche die dem Potential V entsprechenden äusseren Kräfte auf die Kugel ausüben *würden*, falls die Materie der Kugel identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit.

Dabei ist zu bemerken, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ stets *positiv* sind. Jene Resultante X^p (2.) der auf die Kugel ausgeübten Druckkräfte besteht daher aus drei Partialkräften, deren *Richtungen* sich leicht näher angeben lassen. Die *erste* derselben entspricht nämlich dem Princip des Archimedes. Die *zweite* ist von solcher Richtung, als rührte sie her von einer zwischen der Kugel und der festen Ebene stattfindenden *gegenseitigen Abstossung.* Und die *dritte* endlich ist von solcher Art, *dass sie der augenblicklichen Beschleunigung der Kugel fortdauernd entgegenarbeitet.*

Man wird offenbar die Formeln (1.), (2.) auch dann anwenden können, wenn die Bewegung der Kugel noch *unbekannt*, mithin $\mathfrak{x}$ eine *unbekannte* Function der Zeit ist. Wirken z. B. auf die Kugel, ausser der Druckkraft X^p, noch irgend welche sonstigen äusseren Kräfte ein, deren x-Componente X *gegeben* ist, so erhält man für die Bewegung der Kugel die Differentialgleichung:

$$(3.) \qquad M\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p, \quad [(62.)\ \text{p. } 140],$$

wo M die Masse der Kugel vorstellt. Und substituirt man hier für

X^p seinen Werth (2.), so erhält man eine Differentialgleichung, aus welcher $\mathfrak{x}$ als Function von t zu bestimmen ist.

Absichtlich habe ich hier, wie auch in den folgenden Abschnitten zwischen *zweierlei* äusseren Kräften unterschieden. Um diesen Unterschied durch ein Beispiel deutlich hervortreten zu lassen, denke man sich, dass das ganze betrachtete System der Schwere unterworfen ist, dass ausserdem aber die Kugel magnetisch, und der Einwirkung irgend eines (auf der andern Seite der yz-Ebene befindlichen) fest aufgestellten Magneten unterworfen sei. Alsdann wird V das Potential der Schwere sein. Hingegen wird alsdann die in (3.) auftretende Componente X theils von der Schwere der Kugel, theils aber auch von den auf sie einwirkenden magnetischen Kräften herrühren.

Die Rechnungsoperationen des gegenwärtigen Abschnitts lassen sich, unter Anwendung der dipolaren Coordinaten, im Allgemeinen in sehr einfacher planer Weise durchführen. Schwierigkeiten bereitet dabei nur die Auflösung eines gewissen Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen (p. 123). Bezeichnet man die aus diesen Gleichungen zu berechnenden Unbekannten mit $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ *in inf.*, so enthält

$$(4.)\qquad \begin{cases} \text{die erste Gleichung: } A_0,\ A_1, \\ \qquad\text{die zweite: } A_0,\ A_1,\ A_2, \\ \qquad\text{die dritte: } \quad A_1,\ A_2,\ A_3, \\ \qquad\text{die vierte: } \quad\quad A_2,\ A_3,\ A_4, \\ \qquad\quad \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wäre also A_0 bekannt, so könnte man aus der ersten Gleichung sofort A_1, sodann aus der zweiten A_2, hierauf aus der dritten A_3 berechnen, u. s. f. In Wirklichkeit aber ist A_0 *unbekannt.* Und es scheint daher zur definitiven Berechnung der A's noch eine Gleichung zu fehlen. Diese Lücke findet ihren Ersatz durch den Umstand, dass A_n mit wachsendem n gegen 0 convergiren muss, was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$(5.)\qquad A_\infty = 0.$$

Und mit Rücksicht hierauf lässt sich alsdann die Berechnung der A's aus jenen Gleichungen wirklich durchführen, wenn auch mit einiger Mühe.

Als Endresultat dieser Rechnung ergiebt sich für das Geschwindigkeitspotential Φ der Flüssigkeit eine gewisse unendliche Reihe [(33.), p. 129], deren aufeinanderfolgende Glieder merkwürdiger Weise in einfacher Beziehung stehen zu den *Thomson'schen Spiegelpuncten (Electrical Images).* Bezeichnet man nämlich das Centrum c der Kugel mit 2, ferner das Spiegelbild von 2 in Bezug auf die gegebene *feste Ebene*

mit 3, sodann das Spiegelbild von 3 in Bezug auf die *Kugel* mit 4, hierauf das Bild von 4 hinsichtlich der *festen Ebene* mit 5, u. s. w. u. s. w., so ist die in Rede stehende Reihe von der Form:

(6.) $\Phi = C + \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_5 + \Phi_6 - + \cdots$, [vgl. (33.) p. 129]

wo Φ_2 in derselben Beziehung zu 2 steht, wie Φ_3 zu 3, wie Φ_4 zu 4, wie Φ_5 zu 5, u. s. f. Dabei bezeichnet C eine unbestimmte Constante, oder genauer ausgedrückt ein unbestimmtes Glied, welches nur noch von der Zeit abhängen kann.

Der dritte Abschnitt (p. 143—193).

handelt von der Bewegung einer *Kugel* im Innern einer Flüssigkeit, welche nach Aussen hin begrenzt ist von einer *festaufgestellten Kugelfläche*. Dabei dient als Anfangspunct des Coordinatensystems ein auf der letzteren Fläche markirter Punct a_0, als x-Axe der von a_0 ausgehende Durchmesser dieser Fläche, und als yz-Ebene*) die in a_0 an dieselbe gelegte Tangentialebene (Figur p. 190). Auch wird der Einfachheit willen (ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt) wiederum vorausgesetzt, dass die innerhalb der Flüssigkeit vorhandene *Kugel* nur sich selber parallel längs eines *festen Geleises* beweglich ist; der Art, dass ihr Mittelpunct c stets auf der x-Axe bleibt.

Bezeichnet man also den Mittelpunct der festaufgestellten Kugelfläche mit c_0, so wird offenbar das gegenwärtige Problem in das des vorhergehenden Abschnitts übergehen, sobald man den Radius $(a_0 c_0)$ *unendlich gross* werden läss. Es ist mithin jenes frühere Problem nur ein Specialfall des gegenwärtigen.

Obwohl es keinem Zweifel unterliegt, dass die bei jenem frühern *specielleren* Problem angewandte Methode auch zur Absolvirung des gegenwärtigen *allgemeineren* Problems geeignet sein werde, so scheint es doch bei der grossen Weitläufigkeit jener Methode sehr wünschenswerth, dieselbe durch einen *bequemeren Weg* zu ersetzen. Eine gewisse Andeutung zur Auffindung eines solchen bequemeren Weges scheint gegeben zu sein durch das spontane Hereintreten der *Electrical Images* in den Gang der früheren Untersuchungen. Denn hierdurch entsteht die Vermuthung, dass diese *Images* für die *hydrodynamischen* Probleme

*) Dabei ist zu bemerken, dass behufs der Rechnung noch eine *zweite* yz-Ebene eingeführt wird, mithin noch ein *zweiter* auf der schon fixirten x-Axe liegender Anfangspunct. Dieser letztere ist derjenige, von welchem aus in dem gerade betrachteten Zeitaugenblick die Tangenten an beide Kugelflächen *gleich lang* sind (vgl. Figur p. 177).

vielleicht von derselben fundamentalen Bedeutung sein möchten, wie für die *elektrostatischen* Probleme. Diese Vermuthung hat sich in der That bestätigt. Und demgemäss habe ich das Problem des gegenwärtigen, und ebenso auch dasjenige des nächstfolgenden Abschnittes mittelst der *Theorie der Electrical Images* zu absolviren vermocht; wodurch ich der Mühe überhoben worden bin, so fatale Gleichungen, wie die in (4.) angedeuteten, von Neuem behandeln zu müssen.

Doch ist die Entdeckung dieses *neuen bequemeren* Weges meinerseits nur eine *scheinbare* gewesen. Denn in Wirklichkeit ist *Stokes* der Entdecker dieses Weges, wie ich solches nachträglich aus dem *Hicks*'schen *Report* erkannt habe.. In diesem *Report* (1881, p. 6) heisst es nämlich: *A most powerfull method of attacking particular problems in fluid motion is that known as the method of images. The conception appeares to have been first introduced by Stokes in 1843 (Camb. Philosoph. Trans. Vol. 8), in considering the problem of the motion of a sphere in presence of a plane. But the theory received no extension until Thomson's discovery of the electrical image of a point of electricity in presence of a conducting sphere again drew Stokes' attention to the matter, the result being a short note in the „British Association Report for 1847", in which he gives the image in a sphere of a doublet, whose axis passes through the centre of the sphere.* Weitere Bemerkungen über diese Betrachtungen von *Stokes*, sowie über eine sich anschliessende Arbeit von *Hicks* (auf die ich später noch genauer einzugehen habe) findet man in dem Hicks'schen *Report* von 1882, auf p. 12 und 13.

Soviel über die *Methode* der Untersuchung. Was die *Resultate* derselben betrifft, so ergeben sich hier analoge Formeln, wie im vorhergehenden Abschnitt, indem man z. B. an Stelle von (1.), (2.) folgende Ausdrücke erhält:

$$(7.)\qquad T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2, \quad [(65.)\ \text{p. } 190],$$

$$(8.)\qquad X^p = -X^j \pm \mathfrak{A}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \mathfrak{B}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}, \quad [(70.)\ \text{p. } 191].$$

Dabei bezeichnen F, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Functionen der Centraldistanz E der beiden Kugelflächen, und zwar Functionen, welche, ausser von E, nur noch von drei Constanten abhängen, nämlich von den Radien R und R_0 der beiden Kugelflächen und von der Dichtigkeit ϱ der Flüssigkeit. Ausserdem ist (ebenso wie früher) unter $\mathfrak{x}$ die x-Coordinate des Mittelpuncts c der in Bewegung begriffenen Kugel zu verstehen. Die Resultante X^p des auf diese Kugel ausgeübten Druckes zerfällt nach (8.) in

drei Partialkräfte; und die Richtungen dieser Partialkräfte lassen sich leicht angeben. Die *erste* derselben entspricht nämlich dem Princip des Archimedes; die *zweite* ist von solcher Richtung, als rührte sie her von einer zwischen den beiden Kugelmittelpuncten stattfindenden *gegenseitigen Anziehung*; und die *dritte* endlich ist von solcher Art, dass sie *der augenblicklichen Beschleunigung der Kugel jederzeit entgegenarbeitet.*

Bei den Formeln (7.), (8.) kann (ähnlich wie früher) das $\mathfrak{x}$ als eine *beliebig gegebene* Function der Zeit aufgefasst werden. Ist $\mathfrak{x}$ *unbekannt*, mithin die Bewegung der Kugel ebenfalls unbekannt, sind aber die auf sie von Aussen her einwirkenden Kräfte gegeben, so findet man zur Bestimmung ihrer unbekannten Bewegung wiederum die in (3.) angegebene Differentialgleichung. U. s. w.

Der vierte Abschnitt (p. 194—236)

handelt von der Bewegung *zweier Kugeln* innerhalb einer Flüssigkeit, die sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt, und im Unendlichen begrenzt zu denken ist von einer *fest aufgestellten geschlossenen Fläche.* Der Betrachtung wird ein absolut festes Coordinatensystem x, y, z zu Grunde gelegt; und zwar wird vorausgesetzt, dass die beiden Kugeln nur sich selber parallel *längs eines festen Geleises* beweglich sind, der Art, dass ihre Mittelpuncte c und c_0 fortdauernd auf der x-Axe bleiben*).

Nimmt man zuvörderst an, die Kugeln befänden sich in *vorgeschriebener* Bewegung, und es seien also die Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ der beiden Kugelmittelpuncte c und c_0 *gegebene* Functionen der Zeit, und es wirkten dabei auf die Flüssigkeit von Aussen her irgend welche Kräfte ein, deren Potential V eine gegebene Function der Coordinaten ist, so wird die Bewegung der Flüssigkeit, wie diese Function $V(x, y, z)$ auch beschaffen sein mag, *stets symmetrisch zur x-Axe* sein. *Die Resultanten der auf die Kugeln ausgeübten Druckkräfte* fallen daher in die Linie der x-Axe, und können demgemäss mit X^p und X_0^p bezeichnet werden. Will man diese Resultanten berechnen, so hat man zunächst *die lebendige Kraft T der Flüssigkeit* zu ermitteln. Für diese letztere erhält man einen Ausdruck von der Form:

*) Behufs der Rechnung wird ausserdem noch ein *zweites* und zwar in Bewegung begriffenes Coordinatensystem x, y, z eingeführt, dessen x-Axe stets zusammenfällt mit der des festen Systems, und dessen Anfangspunct in jedem Augenblick an derjenigen Stelle dieser Axe liegt, von welcher aus die Tangenten an beide Kugeln *gleich lang* sind.

$$(1.)\qquad T = \mathsf{Z}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathsf{Z}_0\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2, \qquad [(7.)\ \text{p. } 196],$$

wo Z, Z_0, H Functionen der Centraldistanz E der beiden Kugeln vorstellen, und zwar Functionen, die, abgesehen von E, nur noch von drei Constanten abhängen, nämlich von den beiden Kugelradien R, R_0 und der Flüssigkeitsdichtigkeit ρ.

Bezeichnet man die Ableitungen der Functionen Z, Z_0, H nach E mit den entsprechenden *kleinen* Buchstaben, setzt man also:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \zeta = \dfrac{d\mathsf{Z}}{dE}, \quad \zeta_0 = \dfrac{d\mathsf{Z}_0}{dE}, \quad \eta = \dfrac{d\mathsf{H}}{dE}, \\ \text{und ferner: } \sigma = \zeta + 2\eta + \zeta_0, \end{cases}$$

so ergiebt sich (zum Theil mittelst mühsamer Untersuchungen), dass die eilf Functionen

(3.) Z, Z_0, $(-\mathsf{H})$, ... [vgl. (69.) p. 219],

(4.) $(\mathsf{Z}+\mathsf{H})$, $(\mathsf{Z}_0+\mathsf{H})$,

(5.) $(\mathsf{Z}\mathsf{Z}_0-\mathsf{H}^2)$,

(6.) $(-\zeta)$, $(-\zeta_0)$, η, ... [vgl. (69.) p. 219],

(7.) $(\eta^2-\zeta\zeta_0)$ und σ, ... [vgl. (22.), (24.) p. 231],

stets positiv sind. Dies ist für die Functionen (3.), (6.), (7.) in meinem Werk wirklich bewiesen, bedarf aber für die Functionen (4.), (5.) noch eines kleinen Nachtrages.

Um diesen Nachtrag zu liefern, addiren wir die beiden auf p. 221 für Z, H angegebenen Ausdrücke, und erhalten in solcher Weise eine Formel von der Gestalt:

$$(a.)\qquad \mathsf{Z}+\mathsf{H} = (\text{pos. F.})(\Gamma + \Delta)$$

wo (pos. F.) einen positiven Faktor vorstellt, während Γ, Δ die Bedeutungen haben:

$$(b.)\qquad \Gamma = 3(\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 + \ldots),$$

$$(c.)\qquad \Delta = 1 - 3(\psi_1^3 + \psi_2^3 + \psi_3^3 + \ldots).$$

Dabei repräsentiren φ_j und ψ_j folgende Ausdrücke:

$$(d.)\qquad \varphi_j = \frac{(1-q^2)f^j}{1-q^2f^{2j}}, \quad \psi_j = \frac{\sqrt{(1-q^2)(1-q_0^2)}}{\sqrt{f}}\,\frac{f^j}{1-f^{2j}}.$$

Hieraus folgt, dass φ_j, ψ_j *positiv* sind; denn es repräsentiren q, q_0 und $f=qq_0$ positive ächte Brüche, und überdiess sind (im ganzen Werk) unter den Quadratwurzeln stets die positiven Werthe derselben zu verstehen. Aus dem Positivsein von φ_j, ψ_j folgt, dass z. B.

(e.) Γ ebenfalls *positiv* ist.

Was ferner Δ betrifft, so kann das ψ_j (d.) so geschrieben werden:

$$\psi_j = \left[\frac{\sqrt{(1-q^2)(1-q_0^2)}\cdot\sqrt{f}}{1-f^2}\right]\frac{(1-f^2)f^{j-1}}{1-f^{2j}},$$

wo der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck $< \frac{1}{2}$ ist; wie solches aus (γ.), (ϑ) p. 215, 216 sofort sich ergiebt. Somit folgt:

$$\psi_j < \frac{1}{2}\left(\frac{f^{j-1}}{1+f^2+f^4+\cdots+f^{2j-2}}\right) = F_j,$$

wo F_j als augenblickliche Abbreviatur dienen soll für den Ausdruck rechts. Der Differentialquotient dieses Ausdrucks F_j nach f ist nach p. 137 *stets positiv*. Folglich wird F_j mit wachsendem f stets wachsen, und daher, weil f zwischen 0 und 1 variirt, stets zwischen 0 und $\frac{1}{2j}$ bleiben; so dass man also erhält:

$$\psi_j < \frac{1}{2j}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aber aus (c.):

$$\Delta > 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right],$$

mithin *a fortiori*:

$$\Delta > 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\right],$$

also, weil die hier in der eckigen Klammer stehende Reihe $= \frac{\pi^2}{6}$ ist:

$$\Delta > 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

folglich:

(f.) $$\Delta = \text{pos.}$$

Schliesslich erhält man aus (a.), (e.), (f.):

(g.) $$Z + H = \text{pos.}$$

Und in analoger Weise wird sich ergeben, dass

(h.) $$Z_0 + H \text{ ebenfalls } = \text{pos.}$$

ist. Aus (g.), (h.) folgt sofort:

$$Z > -H,$$
$$Z_0 > -H.$$

Hieraus aber folgt weiter [weil Z, Z_0 und $(-H)$ positiv sind, vgl. (3.)]:

(i.) $$ZZ_0 > H^2.$$

Und durch die Formeln (g.), (h.), (i.) ist der Beweis geführt für die in (4.), (5.) gemachten Behauptungen.

Bemerkung. — Uebrigens ist die Function σ (7.) nicht nur *positiv*, sondern, so lange die beiden Kugeln einander nicht berühren, auch *stets von Null verschieden*, wie sich solches aus der Untersuchung p. 227—231 leicht ergiebt.

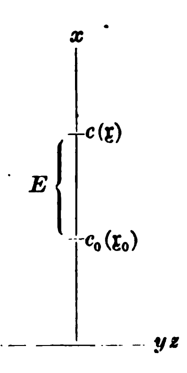
Auf Grund der Formel (1.) und unter Anwendung des Hamilton'schen Princips ergeben sich nun für die Resultanten X^p und X_0^p der Druckkräfte die Werthe:

$$(8.)\quad X^p = -X^j - \zeta\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + \sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 - 2\left(\mathsf{Z}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}\right),$$

$$(9.)\quad X_0^p = -X_0^j + \zeta_0\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - 2\left(\mathsf{Z}_0\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} + \mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right),\quad [(3.)\ \text{p. } 233],$$

wo ζ, ζ_0, η, σ die Bedeutungen (2.) haben, überdiess aber vorausgesetzt ist, dass $\mathfrak{x} > \mathfrak{x}_0$ sei, mithin die Centraldistanz E den Werth habe:

(10.) $\qquad E = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \qquad$ (vgl. die Figur).



Die auf die Kugel (c) ausgeübte Druckkraft X^p besteht, zufolge (8.), aus *fünf Partialkräften*, deren Richtungen leicht angebbar sind. Die *erste* dieser Partialkräfte entspricht nämlich dem Princip des *Archimedes*, die *zweite* und *dritte* sind von solcher Richtung, als rührten sie her von einer zwischen den beiden Kugeln stattfindenden *gegenseitigen Abstossung**). Die *vierte* ist von solcher Art, dass sie der augenblicklichen Beschleunigung der betrachteten Kugel (c) stets *entgegenarbeitet*; und die *fünfte* endlich von solcher Beschaffenheit, als würde die Kugel (c) durch die augenblickliche Beschleunigung ihrer Nebenkugel (c_0) zu einer Bewegung in *gleichem* Sinne animirt.

Sind die Bewegungen der beiden Kugeln *unbekannt*, weiss man aber, dass dieselben, ausser von den Druckkräften X^p und X_0^p, noch von irgend welchen sonstigen Kräften sollicitirt werden, deren x-Componenten X und X_0 *bekannt* sind, so ergeben sich zur Bestimmung jener unbekannten Bewegungen die Differentialgleichungen:

$$(11.)\qquad M\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p,$$

$$(12.)\qquad M_0\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} = X_0 + X_0^p,$$

wo M und M_0 die Massen der beiden Kugeln bezeichnen.

Wie schon erwähnt, wurde ich erst nach Vollendung meines Werkes auf die schätzbare Arbeit von *Hicks* aufmerksam: *On the motion of two spheres in a fluid* (vom Jahre 1881, in den *Philosoph. Trans.*

---

*) Es ergiebt sich dies sofort mit Rücksicht auf das in (6.), (7.) über die *Vorzeichen* der Functionen ζ, σ Gesagte.

**) Es ergiebt sich dies mit Rücksicht auf das in (3.) über die *Vorzeichen* der Functionen Z, H Gesagte.

of the R. Society of London, Vol. 171, *p.* 455). Die Resultate dieser *Hicks*'schen Untersuchung stimmen mit den meinigen, soweit ich die Controle angestellt habe, völlig überein. Von ganz besonderm Interesse war dabei für mich in der Hicks'schen Abhandlung (l. c. p. 483) folgender Passus: *Hence we are led to conclude, that — — — the spheres always move so that* $\frac{dE}{dt}$ *tends to increase*), whilst in the case of equal spheres, or that, in which the radius of the one is twice that of the other, we know for certain that such is the case.* In der That fehlt (wie Hicks ausdrücklich hervorhebt) zur wirklichen Begründung des in diesen Worten angedeuteten Satzes noch der Nachweis dafür, dass die Grössen $(\zeta + \eta)$ und $(\zeta_0 + \eta)$ *positiv* sind, oder, genauer ausgedrückt, wenigstens der Nachweis dafür, dass die Summe dieser beiden Grössen, d. i.:

$$\sigma = \zeta + \zeta_0 + 2\eta \tag{13.}$$

stets positiv sei. Und hievon abgesehen, *scheint* mir bei Hicks ausserdem auch noch der Beweis *dafür* zu fehlen, dass

$$(\mathsf{Z} + \mathsf{H}) \quad \text{und} \quad (\mathsf{Z}_0 + \mathsf{H}) \tag{14.}$$

stets positiv sind. Und doch dürfte auch dieser Nachweis zur strengen Begründung des von Hicks angedeuteten Satzes unentbehrlich sein**).

Wie dem auch sei, — jedenfalls ist der Beweis des beständigen Positivbleibens der Grössen (13.) und (14.) durch die von mir aufgestellten Sätze (3.), (4.), (5.), (6.), (7.) geliefert, und hiemit jener von Hicks vermuthete Satz zur *Gewissheit* erhoben worden. Man kann diesen Satz, bei welchem das Nichtvorhandensein äusserer Kräfte vorausgesetzt wird, im Anschluss an die vor wenig Augenblicken [p. XIX] festgesetzten Vorstellungen, folgendermassen aussprechen:

Der Hicks'sche Satz. — *Sind die beiden Kugeln innerhalb der Flüssigkeit längs ihres festen Geleises durch beliebige Anfangsstösse in Bewegung versetzt, ohne dass sonst auf das betrachtete System* (Kugeln und Flüssigkeit) *von Aussen her irgend welche Kräfte einwirkten, so wird*

---

*) In jener Abhandlung steht *decrease*, was wohl ohne Zweifel ein in der angegebenen Weise zu verbessernder Druckfehler ist. Uebrigens mag es mir gestattet sein, bei der Besprechung der Hicks'schen Arbeit an *meiner* Bezeichnungsweise festzuhalten, z. B. E zu setzen statt des Hicks'schen r.

**) Auf p. 483 seiner Abhandlung heisst es nämlich (in der sechsten Zeile): *The last terme is positive etc.*, eine Behauptung, die doch wohl nur dann gerechtfertigt sein wird, wenn zuvor der Beweis des beständigen Positivbleibens der Grössen (14.) geführt ist.

während dieser Bewegung der Differential-Quotient der Centraldistanz nach der Zeit in fortdauerndem Wachsen begriffen sein.

Bei der besondern Einfachheit und Schönheit dieses Satzes mag es mir gestattet sein, auf seinen Beweis hier näher einzugehen, wobei ich indessen einen Weg einschlagen werde, der von dem von Hicks angedeuteten wesentlich verschieden ist.

Beweis des Hicks'schen Satzes. — Da wir die Linie, längs welcher die Mittelpuncte c und c_0 der beiden Kugeln sich bewegen, zur x-Axe gewählt, und überdiess die x-Coordinaten jener beiden Puncte mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ bezeichnet haben, so ergiebt sich für die lebendige Kraft $\mathfrak{T}$ der *beiden Kugeln* der Ausdruck:

$$\mathfrak{T} = \frac{M}{2}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \frac{M_0}{2}\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2, \tag{15.}$$

wo M und M_0 die Massen der beiden Kugeln vorstellen. Andererseits hat die lebendige Kraft T der Flüssigkeit, nach (1.), den Werth

$$T = \mathsf{Z}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathsf{Z}_0\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2. \tag{16.}$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{T} + T = \mathsf{A}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathsf{A}_0\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2, \tag{17.}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\mathsf{A} = \frac{M}{2} + \mathsf{Z} \quad \text{und} \quad \mathsf{A}_0 = \frac{M_0}{2} + \mathsf{Z}_0. \tag{18.}$$

Da nun auf das betrachtete System (Kugeln und Flüssigkeit) von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken sollen, so nehmen das *Princip der lebendigen Kraft* und das *Hamilton'sche Princip* [vgl. p. XII] die einfache Gestalt an:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(\mathfrak{T} + T)]\,dt = 0, \tag{19.}$$

$$\mathfrak{T} + T = \text{Const.} = h^2. \tag{20.}$$

Aus (19.) ergeben sich sofort die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\frac{d\mathfrak{x}}{dt}} &= \frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\mathfrak{x}}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}} &= \frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial\mathfrak{x}_0}. \end{aligned} \tag{21.}$$

Hält man nun an der Vorstellung fest, dass $\mathfrak{x} > \mathfrak{x}_0$, mithin $E = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ sein soll [Figur p. XXII], und beachtet man überdiess, dass Z, Z_0, H

und A, A_0 *lediglich* von E abhängen, so können diese Gleichungen (21.), mit Rücksicht auf (17.), auch so geschrieben werden:

$$(22.)\qquad \begin{aligned} 2\frac{d}{dt}\left(\mathsf{A}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right) &= \frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial E},\\ 2\frac{d}{dt}\left(\mathsf{A}_0\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}+\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right) &= -\frac{\partial(\mathfrak{T}+T)}{\partial E}, \end{aligned}$$

Und hieraus folgt, falls man die *linken* Seiten weiter ausführt, und *rechts* für $(\mathfrak{T}+T)$ seinen Werth (17.) substituirt, nach einfachen Reductionen:

$$(23.)\qquad \begin{aligned} 2\mathsf{A}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}+2\mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} &= -\zeta\left(\frac{dE}{dt}\right)^2+\sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2,\\ 2\mathsf{A}_0\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}+2\mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= +\zeta_0\left(\frac{dE}{dt}\right)^2-\sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

wo ζ, ζ_0, σ die in (2.) p. XX angegebenen Bedeutungen haben*).

Löst man die Gleichungen (23.) auf nach den beiden Grössen $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}$, und subtrahirt man die alsdann für diese beiden Grössen sich ergebenden Werthe von einander, so erhält man (weil $E=\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0$ ist):

$$(24.)\qquad \frac{d^2E}{dt^2}=\frac{(\mathsf{A}+\mathsf{H})\left[\sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2-\zeta_0\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right]+(\mathsf{A}_0+\mathsf{H})\left[\sigma\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2-\zeta\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right]}{2(\mathsf{A}\mathsf{A}_0-\mathsf{H}^2)}.$$

Die hier auftretenden sechs Grössen

$$\sigma,\ (-\zeta),\ (-\zeta_0),\ (\mathsf{A}+\mathsf{H}),\ (\mathsf{A}_0+\mathsf{H}),\ (\mathsf{A}\mathsf{A}_0-\mathsf{H}^2)$$

sind aber stets *positiv*; wie sich leicht ergiebt, falls man für A, A_0 ihre Werthe (18.) substituirt, und die Sätze (3.), (4.), (5.), (6.), (7.) beachtet. Somit folgt aus (24.), dass auch

$$(25.)\qquad \frac{d^2E}{dt^2}\ \textit{stets positiv}$$

sein wird. *Und dies ist der Hicks'sche Satz.* Q. e. d.

Sich anschliessende Betrachtungen. — Wenn die beiden Kugeln, in Folge passender Anfangsstösse, einander sich nähern, so wird im Augenblick der Berührung eine gegenseitige Reflexion stattfinden. Doch kann unter Umständen eine solche Reflexion auch schon *vor* dem Augenblick der Berührung erfolgen. In der That lässt sich zeigen, dass je nach dem Anfangszustande folgende drei Fälle eintreten können, und nur diese allein:

---

*) Uebrigens kann man diese Gleichungen (23.) auch direct aus den Formeln (8.), (9.), (11.), (12.) ableiten, indem man daselbst X, X_0 und X', X_0' verschwinden lässt.

Entweder wird die Centraldistanz E *der beiden Kugeln während ihrer Bewegung unaufhörlich wachsen. Oder, es wird* E *fortwährend abnehmen bis zur schliesslichen Berührung der beiden Kugeln. Oder endlich, es wird* E *fortwährend abnehmen bis zu einem bestimmten Augenblick, in welchem die Kugeln einander noch nicht berühren, in diesem Augenblick aber aus dem Abnehmen ins Wachsen übergehen, und sodann weiterhin beständig im Wachsen verbleiben.* Selbstverständlich ist dabei wieder vorausgesetzt, dass keine äusseren Kräfte einwirken.

Um diese Behauptungen zu beweisen, addiren wir zuvörderst die beiden Gleichungen (22.). Durch Integration der so entstehenden Formel folgt alsdann:

$$(26.)\qquad (\mathsf{A}+\mathsf{H})\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+(\mathsf{A}_0+\mathsf{H})\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}=\text{Const.}=hk,$$

wo h dieselbe Constante sein soll, wie in (20.), während k eine *neue* Constante vorstellt. Andererseits folgt aus (20.), falls man für $(\mathfrak{T}+T)$ seinen Werth (17.) einsetzt:

$$(27.)\qquad \mathsf{A}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2+2\mathsf{H}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}+\mathsf{A}_0\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2=h^2.$$

Löst man diese beiden Gleichungen (26.), (27.) auf nach den beiden Grössen $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}$ [was am Einfachsten durch Einführung der *Summe* und der *Differenz* der beiden Grössen zu bewerkstelligen ist], so erhält man:

$$(28.)\qquad \begin{aligned}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}&=\frac{hk}{\Pi}+\frac{\varepsilon h(\mathsf{A}_0+\mathsf{H})}{\Pi}\frac{\sqrt{\Pi-k^2}}{\sqrt{\Delta}},\\ \frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}&=\frac{hk}{\Pi}-\frac{\varepsilon h(\mathsf{A}+\mathsf{H})}{\Pi}\frac{\sqrt{\Pi-k^2}}{\sqrt{\Delta}},\end{aligned}$$

wo sämmtliche Wurzelzeichen positiv zu denken sind, und $\varepsilon=\pm 1$ ist. Dabei haben Δ, Π die Bedeutungen:

$$(29.)\qquad \begin{cases}\Delta=\mathsf{A}\mathsf{A}_0-\mathsf{H}^2=\frac{MM_0}{4}+\frac{M\mathsf{Z}_0+M_0\mathsf{Z}}{2}+(\mathsf{Z}\mathsf{Z}_0-\mathsf{H}^2),\\ \Pi=\mathsf{A}+\mathsf{A}_0+2\mathsf{H}=\frac{M+M_0}{2}+(\mathsf{Z}+\mathsf{Z}_0+2\mathsf{H}),\\ \text{mithin ist: }\frac{d\Pi}{dE}=\zeta+\zeta_0+2\eta=\sigma,\qquad [\text{vgl. (2.) und (18.)}].\end{cases}$$

Durch Subtraction der beiden Formeln (28.) folgt, weil $E=\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0$ ist, und mit Rücksicht auf (29.):

$$\frac{dE}{dt}=\varepsilon h\frac{\sqrt{\Pi-k^2}}{\sqrt{\Delta}},$$

mithin:

$$(30.)\qquad \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 = \frac{h^2(\Pi - k^2)}{\Delta}.$$

Um auf die Discussion der Formeln (25.) und (30.) näher eingehen zu können, sind zuvörderst folgende Bemerkungen vorauszuschicken. Die Grössen Δ, Π (29.) sind ebenso wie Z, Z_0, H und A, A_0 lediglich Functionen von E, und besitzen, zufolge der Sätze (3.), (4.), (5.), (6.), (7.), folgende Eigenschaften:

(31.) Δ und Π sind stets *positiv* und *verschieden von Null;* ferner ist der Differential-Quotient $\frac{d\Pi}{dE} = \sigma$ ebenfalls stets *positiv*, und, so lange die beiden Kugeln einander nicht berühren, auch stets *verschieden von Null* [vgl. die Bemerkung auf p. XXI].

Die von E abhängende Function Π wird somit durch eine Curve dargestellt sein, welche mit wachsendem E *fortwährend steigt*, und durchweg *oberhalb* der Abscissenaxe liegt. Ihre *kleinste* Ordinate Π' entspricht daher der *kleinsten* Abscisse, d. i. derjenigen Abscisse E', welche der Berührung der beiden Kugeln correspondirt*). Und andererseits wird die *grösste* Ordinate Π'' dem grössten Werthe von E, d. i. der Abscisse $E = \infty$ entsprechen.

Denkt man sich überdiess parallel der Abscissenaxe diejenige gerade Linie construirt, deren Ordinate gleich der positiven Constanten k^2 ist, so hat man jetzt *zwei durchweg oberhalb* der Abscissenaxe liegende Curven, nämlich die Curve (Π) und die gerade Linie (k^2). Was die relative Lage dieser beiden Curven zu einander betrifft, so wird entweder die Linie (k^2) durchweg *unterhalb* der Curve (Π) liegen, mithin

$$(32.\,a)\qquad 0 < k^2 < \Pi'$$

sein. Oder es wird die Linie (k^2) die Curve (Π) schneiden, und zwar nur in *einem* Punct, mithin

$$(32.\,b)\qquad \Pi' < k^2 < \Pi''$$

sein. Ein dritter Fall ist unmöglich. Denn läge die Linie (k^2) durchweg *oberhalb* der Curve (Π), so würden sämmtliche Werthe der Function Π kleiner als k^2 sein; *was der Formel* (30.), in welcher Δ stets positiv ist (31.), *widerspricht.*

Nach (25.) *ist nun der Differentialquotient* $\frac{dE}{dt}$ *stets und unter allen Umständen im Wachsen begriffen. Demgemäss sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden:*

*) Es ist mithin dieses E' gleich der Summe der beiden Kugelradien.

Fall I: Der Differentialquotient $\frac{dE}{dt}$ hat zur Zeit des Anfangszustandes einen *positiven* Werth. Alsdann wird derselbe, weil er fortdauernd wächst, beständig positiv *bleiben*, *mithin E selber* ebenfalls in *unaufhörlichem Wachsen begriffen sein.*

Fall II: Der Differentialquotient $\frac{dE}{dt}$ ist zu Anfang *negativ*. Alsdann wird derselbe (weil er fortwährend wächst) von jenem negativen Anfangswerthe aus *entweder* gegen Null wachsen, ohne dabei die Null zu erreichen, *oder aber* durch Null hindurch wachsend zu positiven Werthen übergehen und sodann zu immer grössern und grössern positiven Werthen fortschreiten. Diese beiden Unterabtheilungen des Falles II mögen mit IIa und IIb bezeichnet sein.

Der Fall IIa *tritt ein*, wenn die Linie (k^2) *durchweg unterhalb* der Curven (Π) liegt, mithin

$$0 < k^2 < \Pi'$$

ist. Denn alsdann sind sämmtliche Werthe der Function Π grösser als k^2, so dass also der in (30.) enthaltene Factor ($\Pi - k^2$), mithin auch $\frac{dE}{dt}$ selber niemals Null werden kann. In diesem Fall IIa wird daher $\frac{dE}{dt}$ von seinem *negativen Anfangswerth* aus fortwährend wachsen, ohne die Null zu erreichen, mithin stets negativ *bleiben*. *Folglich wird E selber fortwährend abnehmen bis zur schliesslichen Berührung der Kugeln.* Die Zeit, welche vom Anfangsaugenblick ($E = E^0$) bis zum Augenblick der Berührung ($E = E'$) verfliesst, hat zufolge (30.) den Werth:

$$t = \frac{1}{h} \int_{E'}^{E^0} \frac{\sqrt{\Delta} \cdot dE}{\sqrt{\Pi - k^2}},$$

und ist also *endlich*, weil ($\Pi - k^2$) verschieden von Null bleibt.

Der Fall IIb *tritt ein*, wenn die Linie (k^2) die Curve (Π) schneidet, mithin

$$\Pi' < k^2 < \Pi''$$

ist; die Ordinate des Schnittpunktes ist k^2, und seine Abscisse mag E^* heissen. Alsdann nämlich wird der von seinem *negativen* Anfangswerth aus wachsende Differentialquotient $\frac{dE}{dt}$ zuvörderst *negative* Werthe durchlaufen, was mit einer Abnahme von E, mithin auch von Π verbunden ist. Dieses Negativbleiben von $\frac{dE}{dt}$ und Abnehmen von E und Π wird so lange fortdauern, bis Π zu k^2 herabgesunken, mithin E in E^*

übergegangen ist. In diesem Augenblick ist alsdann $\frac{dE}{dt}$, zufolge (30.), gleich *Null*; im nächstfolgenden Augenblick wird daher $\frac{dE}{dt}$ (weil es beständig wächst) bereits einen *positiven* Werth haben, und sodann zu immer grösseren und grösseren positiven Werthen fortschreiten. Im Falle IIb. *wird also E selber zunächst bis E^* hin abnehmen, und sodann von E^* aus wieder zu wachsen anfangen, und hierauf weiterhin in beständigem Wachsen verbleiben.* Die Zeit, welche vom Anfangsaugenblick ($E = E^0$) bis zum Augenblick der Umkehr ($E = E^*$) verstreicht, hat nach (30.) den Werth:

$$t = \frac{1}{h}\int_{E^*}^{E^0} \frac{\sqrt{\Delta}\cdot dE}{\sqrt{\Pi - k^2}};$$

und dieser Werth wird trotzdem, dass $(\Pi - k^2)$ für $E = E^*$ verschwindet, ein *endlicher* sein. Denn für solche E, die nur wenig von E^* verschieden sind, ergiebt sich nach dem *Taylor*'schen Satz:

$$\Pi - k^2 = \frac{E - E^*}{1}\left(\frac{d\Pi}{dE}\right)_{E=E^*} + \frac{(E - E^*)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\Pi}{dE^2}\right)_{E=E^*} + \cdots$$

wo der Ausdruck $\left(\frac{d\Pi}{dE}\right)_{E=E^*}$, ebenso wie *sämmtliche* Werthe von $\frac{d\Pi}{dE}$, *von Null verschieden* ist. Vgl. (31.).

Der fünfte Abschnitt (p. 237—262)

bietet gewisse Ergänzungen dar zum *ersten* Abschnitt. Lange Zeit war ich nämlich der Vermuthung, dass die in den Formeln jenes ersten Abschnitts enthaltenen Differenzen

(1.) $\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)$, etc. etc. [vgl. (16. a) p. IX]

vielleicht *identisch Null* sein möchten, wodurch alsdann die in Rede stehenden Formeln bedeutend einfacher geworden wären. Schliesslich bin ich indessen zu bestimmten Beispielen gelangt, aus denen hervorgeht, dass ein solches Nullsein im Allgemeinen *nicht* stattfindet.

Denkt man sich nämlich einen starren Körper, der in seinem Innern *einen mit incompressibler Flüssigkeit erfüllten Hohlraum* besitzt, und bringt man auf dieses aus Körper und Flüssigkeit bestehende System die allgemeine Theorie des *ersten* Abschnitts in Anwendung, so gelangt man zu Formeln, in denen jene Differenzen (1.) *nicht* verschwinden.

Einer ausführlichen Behandlung wird dabei namentlich *der* Fall unterworfen, dass der Körper um einen festen *Punct o* drehbar ist.

Setzt man überdiess voraus, dass die Vertheilung der gegebenen Körper- und Flüssigkeitsmasse *symmetrisch* sei in Bezug auf drei durch o gehende (aufeinander senkrechte und mit dem Körper fest verbundene) Ebenen, und dass von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken, so lassen sich die Differentialgleichungen für die Bewegung des Körpers leicht angeben. Und zwar werden diese Differentialgleichungen, falls jener Hohlraum ein *einfach zusammenhängender* ist, geradezu durch die bekannten *Euler*'schen Formeln ausgedrückt sein:

$$C'\frac{dp}{dt} = (C'' - C''')\,qr, \tag{2.}$$

etc. etc. etc.

wo die Constanten C', C'', C''' von der Art und Weise abhängen, in welcher die Masse des betrachteten Systems in Bezug auf die genannten drei Ebenen vertheilt ist. Dabei bezeichnen p, q, r, ebenso wie bei Euler, die Drehungen des Körpers um seine Hauptaxen, d. i. um die Schnittlinien der genannten drei Ebenen.

Ist hingegen der von der incompressiblen Flüssigkeit erfüllte Hohlraum ein *mehrfach zusammenhängender*, so erhält man statt der Gleichungen (2.) *folgende* Differentialgleichungen:

$$C'\frac{dp}{dt} = (C'' - C''')\,qr - \tfrac{1}{2}\,(h''r - h'''q), \quad \text{[vgl. (62.) p. 254]}, \tag{3.}$$

etc. etc. etc.,

wo h', h'', h''' gewisse neue Constanten vorstellen, die nicht nur von der vorhandenen Massenvertheilung, sondern überdiess auch noch *von dem jedesmaligen Anfangszustande der Flüssigkeit* abhängen.

Um über den Charakter dieser Constanten h', h'', h''' hier wenigstens eine Andeutung zu geben, wollen wir uns die Flüssigkeit zur Zeit t^{00}, während der Körper noch *festgehalten* wird, in irgend welchen *Anfangszustand* versetzt denken. Solches ausgeführt gedacht, mag jetzt der Körper selbst durch irgend welche continuirlich anhebende, mehr und mehr anwachsende, schliesslich aber in einem bestimmten Zeitaugenblick t^0 wieder erlöschende Kräfte *in Bewegung versetzt* werden. Alsdann gelten vom Augenblick t^0 ab die Differentialgleichungen (3.). Und zwar werden die darin enthaltenen Constanten h', h'', h''' *gleich Null* oder *von Null verschieden* sein, je nachdem jener der Zeit t^{00} entsprechende Anfangszustand der Flüssigkeit ein Zustand der *Ruhe* oder der *Bewegung* war.

Man kann diese Betrachtungen ohne Mühe weiter verallgemeinern, und gelangt alsdann zu folgendem Satz:

Enthält ein starrer Körper in seinem Innern einen mit incompressibler Flüssigkeit erfüllten Hohlraum, so wird der Körper unter dem Einfluss gegebener äusserer Kräfte nach genau denselben Gesetzen, wie ein gewöhnlicher massiver Körper (ohne innere Flüssigkeit), *sich bewegen, vorausgesetzt, dass der Hohlraum ein einfach zusammenhängender ist. Ist hingegen dieser Raum ein mehrfach zusammenhängender, und die Flüssigkeit zu Anfang innerhalb dieses Raumes in Bewegung gesetzt, so werden die in Rede stehenden Gesetze wesentlich andere sein* [p. 257].

Ausserdem enthält der fünfte Abschnitt noch einige beiläufige Bemerkungen über das Princip der lebendigen Kraft, ferner über die *Laplace*'schen Schwerpuncts- und Flächensätze. U. s. w.

Der Anhang (p. 263—320).

Im *vierten* Abschnitt wurde die Bewegung *zweier Kugeln* innerhalb einer incompressiblen Flüssigkeit untersucht. Mit diesen Untersuchungen aber stehen die auf zwei Kugeln bezüglichen *Probleme der elektrostatischen und magnetischen Induction*, hinsichtlich der mathematischen Behandlungsweise, in naher Verwandtschaft. Und zwar dürfte von diesen *drei* Problemen das *elektrostatische* als das leichteste zu bezeichnen sein. Schwieriger ist jenes im vierten Abschnitt behandelte *hydrodynamische* Problem; und am schwierigsten endlich das *magnetische* Problem.

Das elektrostatische Problem für zwei Kugeln kann im Ganzen nach vier verschiedenen Methoden behandelt werden, nämlich erstens nach der bekannten *Poisson'schen Methode**), zweitens mit Hülfe der *Thomson'schen Spiegelpuncte***), wobei man alsdann entweder der gewöhnlichen Polarcoordinaten, oder (was vortheilhafter ist) der dipolaren Coordinaten sich bedienen kann, drittens mittelst der *Liouville'schen Methode der reciprocen Radien****), wobei man wiederum die Wahl hat zwischen jenen beiderlei Coordinatensystemen, endlich viertens mittelst einer Methode, *die lediglich auf der Anwendung der dipolaren Coordinaten beruht*†).

---

*) *Poisson* (*1812 und 1813*), in den *Mémoires* der Pariser Akademie.

**) *W. Thomson* (*1845*). Vgl. die *Papers of Thomson* (London, 1872), p. 144 etc., ferner auch p. 86 etc.

***) *Liouville* (*1847*), *note au sujet d'une lettre de M. W. Thomson*, im Liouville'schen Journal, Bd. 12, p. 265. Von Neuem abgedruckt in den *Papers of Thomson* (London, 1872). Vgl. am letztern Ort namentlich die Aeusserungen auf p. 172, 173.

†) *C. Neumann* (*1862*), über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt ist, Halle, Verlag von Schmidt, 1862. Vgl. daselbst p, 85—110.

Diese vierte Methode, welche wohl unter allen die *einfachste* sein dürfte, ist von mir im Jahre 1862 publicirt worden, jedoch in einer Darstellungsweise, die Manches zu wünschen lässt. Ich habe daher die gegenwärtige Gelegenheit benutzt, um diese Methode von Neuem und in möglichst übersichtlicher Gestalt mitzutheilen, (p. 263—272), wobei hinsichtlich der dipolaren Coordinaten nur diejenigen einfachen Vorkenntnisse erforderlich werden, welche in diesem Werke selber (p. 97—113) bereits entwickelt sind.

Das Problem der magnetischen Induction für zwei Kugeln ist im Jahre 1878 im 24. Jahrgang des Schlömilch'schen Journals von *Chwolson* behandelt worden, unter der Voraussetzung, dass die gegebenen inducirenden Kräfte symmetrisch sind in Bezug auf die Centrallinie der beiden Kugeln. Auch hat *Kirchhoff* über diese Chwolson'sche Arbeit ein ausführliches Referat erstattet in den Monatsberichten der Berliner Ak. d. W. vom 4. April 1878.

Das in Rede stehende Problem kann, wie Chwolson gezeigt hat, unter Anwendung der dipolaren Coordinaten im Allgemeinen in einfacher und leicht sich darbietender Weise gelöst werden. *Schwierigkeiten* bereitet dabei nur die Berechnung der in den Reihenentwicklungen der inducirten Potentiale Q und Q_0 auftretenden *constanten Coefficienten* A_0, A_1, A_2, etc. und B_0, B_1, B_2, etc. Diese unbekannten Constanten sind nämlich zu bestimmen mittelst zweier Systeme linearer Gleichungen, deren jedes aus unendlich vielen solchen Gleichungen besteht. Bezeichnet man die Gleichungen des einen Systems mit $(y_0.)$, $(y_1.)$, $(y_2.)$, etc., die des andern mit $(z_0.)$, $(z_1.)$, $(z_2.)$, etc., so sind

$$
(1.)\quad \begin{cases}
\text{in den Gleichungen } (y_0.),\ (z_0.) \text{ nur } A_0,\ B_0 \text{ und } A_1,\ B_1 \text{ enthalten,} \\
\text{ferner in } (y_1.),\ (z_1.) \text{ nur } A_0,\ B_0,\ A_1,\ B_1 \text{ und } A_2,\ B_2, \\
\text{ferner in } (y_2.),\ (z_2.) \text{ nur } A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2 \text{ und } A_3,\ B_3, \\
\text{ferner in } (y_3.),\ (z_3.) \text{ nur } A_2,\ B_2,\ A_3,\ B_3 \text{ und } A_4,\ B_4, \\
\text{U. s. w. U. s. w.}
\end{cases}
$$

Näher angegeben findet man diese Gleichungen in (35.), $(35.)_0$ auf p. 292, ferner in etwas anderer Gestalt in (37.), $(37.)_0$ auf p. 296.

Wären nun die beiden Anfangs-Constanten A_0, B_0 *bekannt*, so könnte man successive zuerst A_1, B_1 aus den Gleichungen $(y_0.)$, $(z_0.)$, sodann A_2, B_2 aus $(y_1.)$, $(z_1.)$ berechnen. U. s. f. In Wirklichkeit sind aber A_0, B_0 *unbekannt*, so dass also zur definitiven Berechnung der A's und B's *noch zwei Gleichungen fehlen*. Demgemäss hat Chwolson sich bemüht, *ausser* jenen Gleichungen (1.) noch zwei weitere Gleichungen aufzufinden, und solche in der That zu entdecken geglaubt.

Diese Entdeckung aber ist völlig *illusorisch.* Denn bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die von Chwolson neu hinzugefügten beiden Gleichungen nichts Anderes sind, als eine unmittelbare Consequenz der Gleichungen (1.). Derselbe Irrthum ist übrigens auch übergegangen in das *Kirchhoff*'sche Referat. Vgl. p. 294, 295.

In Wirklichkeit finden jene zur Bestimmung der A's und B's noch fehlenden beiden Gleichungen, wie ich im vorliegenden Werke zeige, *ihren Ersatz durch gewisse in der Natur des behandelten Problems liegende Convergenzbedingungen;* so dass wir hier also einen Fall vor uns haben, ganz ähnlich demjenigen, welcher früher (p. XVI) bei Behandlung der hydrodynamischen Probleme uns entgegentrat. Während wir aber damals die wirkliche Auflösung der betreffenden Gleichungen zu *umgehen* im Stande waren (mittelst der Methode der Spiegelpuncte), dürfte im gegenwärtigen Fall eine solche Umgehung *nicht* gut ausführbar sein.

Um nun trotz dieser Schwierigkeiten zur Lösung des magnetischen Problems zu gelangen, scheint mir, nach vielfältigen Versuchen, nichts übrig zu bleiben als die auf dem bekannten Princip der *successiven Inductionen beruhende Methode der successiven Annäherung.*

Man könnte bei Anwendung dieser Methode *zwei* den beiden Kugeln entsprechende *gewöhnliche Polarcoordinatensysteme* einführen, von denen alsdann alternirend bald das eine, bald das andere zu benutzen sein würde. Will man aber diesen fortwährenden und sehr beschwerlichen *Wechsel* des Coordinatensystems vermeiden, so wird man gezwungen sein, die den beiden Kugeln entsprechenden *dipolaren Coordinaten* zu benutzen.

Sollen nun, unter Anwendung dieser dipolaren Coordinaten, die einzelnen Stufen der in Rede stehenden successiven Methode *wirklich erstiegen*, d. i. die diesen einzelnen Stufen entsprechenden Rechnungsoperationen *wirklich ausgeführt* werden, so muss man zuvörderst jene *Chwolson*'schen Gleichungen (1.) wenigstens für den *speciellen* Fall aufzulösen im Stande sein, dass der Radius der *einen* Kugel = 0, mithin in Wirklichkeit nur die *andere* Kugel vorhanden ist. Die Lösung dieser *specielleren* Chwolson'schen Gleichungen, welche nur noch die *A*'s, nicht die *B*'s enthalten, lässt sich aber in der That bewerkstelligen, wie ich solches im vorliegenden Werke gezeigt habe; vgl. die Formeln (12.) p. 299. Das hierbei von mir eingeschlagene Verfahren kommt im Wesentlichen darauf hinaus, dass ich das in Rede stehende magnetische Problem für nur *eine* Kugel, zuvörderst löse unter Anwendung der *gewöhnlichen Polarcoordinaten* (was schon *Poisson* gethan hat), sodann aber die gefundene Lösung von jenen monopolaren Coordinaten auf

die *dipolaren* Coordinaten transformire. Die zu diesem Zweck zu entwickelnden *Transformationsformeln* sind behaftet mit gewissen Functionen

(2.) $$O(x) \quad \text{oder} \quad O_{nj}(x),$$

welche durch hypergeometrische Reihen sich darstellen, und durch mancherlei merkwürdige Eigenschaften sich auszeichnen. Vgl. (A.), (B.), (C.), (D.) p. 302, und ferner p. 312—315.

Will man schliesslich ein ungefähres Bild haben von dem Wesen und den Rechnungsvorschriften*) der in solcher Weise für die Lösung *des allgemeinen Chwolson'schen Problems* sich ergebenden *successiven Methode*, so beachte man zuvörderst, dass das gegebene *inducirende* Potential V *symmetrisch* sein soll in Bezug auf die Centrallinie der beiden Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$, und dass dasselbe also [bei passender Einrichtung des dipolaren Coordinatensystems $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$] innerhalb der *einen* Kugel $\mathfrak{K}$ nach gewissen Functionen

(3.) $$\mathfrak{W}_n = \sqrt{\psi}\, e^{-(n+\frac{1}{2})\vartheta} P_n(\mu),$$

und innerhalb der *andern* Kugel $\mathfrak{K}_0$ nach gewissen andern Functionen

(4.) $$\mathfrak{W}_n^0 = \sqrt{\psi}\, e^{+(n+\frac{1}{2})\vartheta} P_n(\mu)$$

entwickelbar sein wird. Diese Entwickelungen (p. 287):

(5.) $$V = \sum \mathsf{A}_n \mathfrak{W}_n, \text{ innerhalb } \mathfrak{K},$$

(6.) $$V = \sum \mathsf{B}_n \mathfrak{W}_n^0, \text{ innerhalb } \mathfrak{K}_0,$$

haben wir als *gegeben*, mithin die darin enthaltenen Constanten A, B als *bekannt* zu betrachten, und, von diesem Fundament aus, diejenigen Rechnungsvorschriften anzugeben, welche zur schliesslichen Herstellung der in den Kugeln *inducirten* Potentiale Q und Q_0 hinleiten.

Das in der Kugel $\mathfrak{K}$ inducirte Potential Q kann bekanntlich (Satz p. 283) angesehen werden als das Potential einer gewissen *Oberflächenbelegung* dieser Kugel, und wird somit innerhalb dieser Kugel nach den Functionen (3.) entwickelbar sein:

$$Q = \sum C_n \mathfrak{W}_n, \text{ innerhalb } \mathfrak{K}.$$

Um die hier auftretenden unbekannten Constanten C zu ermitteln, zerlegen wir dieselben in einzelne Theile:

$$C_n = A_n + (A)_n + ((A))_n + \cdots,$$

wodurch alsdann die Formel selber folgende Gestalt erhält:

*) Was ich hier über diese Rechnungsvorschriften sagen werde, ist im vorliegenden Werk *nicht* unmittelbar exponirt, ergiebt sich aber leicht aus dem Satz p. 283 und den sich anlehnenden Betrachtungen p. 284—287, sodann aber namentlich aus dem eigentlichen Charakter der in Rede stehenden successiven Methode, p. 318—320.

(7.) $Q = \sum A_n \mathfrak{W}_n + \sum (A)_n \mathfrak{W}_n + \sum ((A))_n \mathfrak{W}_n + \cdots$, innerhalb $\mathfrak{K}$.
Desgleichen kann man den Werth, welchen das in der *andern* Kugel $\mathfrak{K}_0$ inducirte Potential Q_0 innerhalb $\mathfrak{K}_0$ besitzt, durch die analoge Formel darstellen:
(8.) $Q_0 = \sum B_n \mathfrak{W}_n^0 + \sum (B)_n \mathfrak{W}_n^0 + \sum ((B))_n \mathfrak{W}_n^0 + \cdots$, innerhalb $\mathfrak{K}_0$.
Dabei sei bemerkt, dass im vorliegenden Werk die einzelnen Summen in (7.) und (8.) respective mit $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, etc. und $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{S}_0$, etc. bezeichnet sind (p. 319).

Die Rechnungsvorschriften zur Bestimmung der unbekannten Constanten A, (A), $((A))$, etc. und B, (B), $((B))$, etc. sind nun folgende: Man bezeichne die magnetischen Constanten der beiden Kugeln mit $\varkappa$ und $\varkappa_0$, setze ferner zur Abkürzung:

$$\lambda = 4\pi\varkappa, \quad \delta = \frac{1}{2 + 4\pi\varkappa},$$

$$\lambda_0 = 4\pi\varkappa_0, \quad \delta_0 = \frac{1}{2 + 4\pi\varkappa_0}, \quad \text{[vgl. (18.) p. 278]},$$

und bilde ausserdem zwei *von der Grösse und relativen Lage der beiden Kugeln* abhängende Constanten q und q_0, deren Werthe stets positive ächte Brüche sind, vgl. (σ.) p. 205. Sodann bilde man gewisse von q, λ, δ und q_0, λ_0, δ_0 abhängende Constanten:

(9.) $\mathsf{\Delta}_p^n$ und E_p^n, [vgl. (3.) p. 319].

Dies ausgeführt gedacht, haben alsdann jene gesuchten Constanten A, B folgende Werthe:

(10.) $\begin{cases} A_n = \sum \mathsf{\Delta}_p^n \mathsf{A}_p, & \text{[vgl. (4.) p. 320]}, \\ B_n = \sum \mathsf{E}_p^n \mathsf{B}_p, & \text{die Summationen ausgedehnt über } p = 0, 1, 2, \cdots \infty \end{cases}$

wo die A, B die in (5.), (6.) genannten, von Hause aus *gegebenen* Constanten vorstellen. Nachdem in solcher Weise die A, B berechnet sind, erhält man nun weiter die (A), (B) mittelst der Formeln:

$$(11.) \quad \begin{cases} (A)_n = \sum \mathsf{\Delta}_p^n B_p q_0^{2p+1}, \\ (B)_n = \sum \mathsf{E}_p^n A_p q^{2p+1}; \end{cases}$$

hierauf die $((A))$, $((B))$ mittelst der Formeln:

$$(12.) \quad \begin{cases} ((A))_n = \sum \mathsf{\Delta}_p^n (B)_p q_0^{2p+1}, \\ ((B))_n = \sum \mathsf{E}_p^n (A)_p q^{2p+1}; \end{cases}$$

u. s. w. u. s. w. Dabei sind in (10.), (11.), (12.) etc. die Summationen stets ausgedehnt zu denken über $p = 0, 1, 2, \ldots \infty$.

Substituirt man schliesslich diese Werthe der A, (A), $((A))$, etc. und B, (B), $((B))$, etc. in die Formeln (7.), (8.), so ist die Berechnung der inducirten Potentiale Q, Q_0 *vollendet*, wenigstens für solche Puncte, die *innerhalb* $\mathfrak{K}$, resp. *innerhalb* $\mathfrak{K}_0$ liegen. Wie man aber aus diesen innern Werthen auch diejenigen abzuleiten vermag, welche Q *ausserhalb* $\mathfrak{K}$, und Q_0 *ausserhalb* $\mathfrak{K}_0$ besitzt, ergiebt sich leicht. Vgl. p. 286.

Bemerkung. — Beiläufiger Weise findet man auf p. 279—282 eine Untersuchung über *magnetische Bilder*. Ich zeige nämlich daselbst, dass man bei einer gegebenen Kugel nicht nur von *elektrischen* Bildern, sondern in analogem Sinne auch von *magnetischen* Bildern sprechen kann. Denkt man sich z. B. die Kugel magnetisirt durch einen irgendwo ausserhalb derselben befindlichen *Magnetpol*, so wird die in solcher Weise magnetisch gewordene Kugel in Bezug auf alle äussern Punkte äquipotential sein mit einem gewissen *innerhalb* der Kugel zu construirendem *magnetischem Massensystem*. Dieses letztere heisst alsdann das *magnetische Bild* des gegebenen Poles.

Inhalts-Register.

Erster Abschnitt.

Das Hamilton'sche Princip in seiner Anwendung auf die Probleme der Hydrodynamik.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Bewegung einer Kugel im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, welche auf einer Seite von einer festen Ebene begrenzt ist, nach allen übrigen Seiten aber ins Unendliche sich ausdehnt.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Bewegung einer Kugel im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, welche äusserlich begrenzt ist von einer fest aufgestellten Kugelschaale.

Vierter Abschnitt.

Ueber die Bewegung zweier Kugeln im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, die nach Aussen überall ins Unendliche reicht.

Fünfter Abschnitt.

Weitere Untersuchungen über das Hamilton'sche Princip, in seiner Anwendung auf Probleme der Hydrodynamik.

Anhang.

Einige sich anschliessende Betrachtungen über die Probleme der elektrischen und namentlich der magnetischen Induction.

Das Hamilton'sche Princip in seiner Anwendung auf die Probleme der Hydrodynamik.

§ 1.

Einleitung. Vorläufiges über die Resultate der Untersuchung.

Wenn man mit *Thomson* und *Tait* auf die Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit ohne Weiteres die gewöhnliche Formel des *Hamilton'schen Princips* in Anwendung bringt, so entbehrt ein solches Verfahren, wenigstens für den Fall, dass der von der Flüssigkeit eingenommene Raum ein *mehrfach zusammenhängender* ist, der hinreichenden Begründung, wie solches schon von *Boltzmann* hervorgehoben wurde vor etwa zehn Jahren. (Crelle's Journal, Bd. 73, S. 111. Vgl. daselbst namentlich auch S. 128, 129.)

Ja noch mehr. Es lässt sich zeigen, dass die gewöhnliche Formel des Hamilton'schen Princips für den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Raumes *ganz fehlerhafte* Resultate ergiebt.

Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir zuvörderst ein System materieller Puncte $m\,(x, y, z)$, auf welche gegebene Kräfte mX, mY, mZ einwirken, und bezeichnen die lebendige Kraft des Systems mit T. Nach dem *Princip der lebendigen Kraft* gilt alsdann für jedes Zeitelement dt der Bewegung des Systems die Formel:

$$dT = \sum m(Xdx + Ydy + Zdz),$$

oder kürzer geschrieben:

$$dT = dS, \tag{1.}$$

wo das dS als Abbreviatur dienen soll für die obige Summe, mithin zu bezeichnen ist als die von den gegebenen Kräften während der Zeit dt verrichtete *Arbeit*.

Denkt man sich ferner die *wirkliche* Bewegung des Systems während irgend eines Zeitraums $t_0 \ldots t_1$ in willkürlicher Weise abgeändert, und bezeichnet man diese Abänderungen oder Variationen für x, y, z, T

mit δx, δy, δz, δT, so wird nach dem *Hamilton'schen Princip* die Formel gelten:

$$(2.) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta S)\, dt = 0,$$

wo das δS zur Abkürzung steht für $\sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, mithin zu bezeichnen ist als die den Verrückungen δx, δy, δz entsprechende *virtuelle Arbeit* der gegebenen Kräfte.

Diese allgemeinen Formeln (1.), (2.) mögen nun in Anwendung gebracht werden auf eine incompressible Flüssigkeit, welche nach allen Seiten ins Unendliche reicht, und begrenzt ist von einer *fest* aufgestellten, unendlich grossen Kugelfläche. Im Innern der Flüssigkeit mögen zwei *Ringe* (d. i. zwei starre Körper, jeder von ringförmiger Gestalt) sich befinden. Die augenblickliche Lage dieser Ringe hängt im Ganzen von zwölf Variablen α, β, ... ab; und diese zwölf Variablen oder Parameter (wie ich sie weiterhin nennen werde) mögen *gegebene Functionen* der Zeit sein:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \; \ldots\ldots;$$

so dass also die beiden Ringe in *bestimmt vorgeschriebener* Bewegung begriffen sind.

Die Flüssigkeit (exclusive der beiden Ringe) soll nun das System sein, auf welches wir die Formeln (1.), (2.) anwenden wollen, und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

Die Bewegung der Flüssigkeit finde statt *ohne* innere oder äussere Reibung. Ferner sei der *Anfangszustand* der Flüssigkeit ein *wirbelfreier*, d. h. ein solcher, für welchen die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w der Flüssigkeit den Relationen entsprechen:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Alsdann wird bekanntlich die Flüssigkeit *fortdauernd* wirbelfrei bleiben, mithin *fortdauernd* diesen Relationen Genüge leisten. Endlich sei angenommen, dass auf die Flüssigkeit keinerlei Kräfte einwirken, mit Ausnahme derjenigen *Druckkräfte* p, welche auf sie ausgeübt werden von den in Bewegung begriffenen beiden Ringen. Demgemäss wird also bei Anwendung der Formeln (1.), (2.) unter dS z. B. diejenige Arbeit zu verstehen sein, welche von jenen Druckkräften p während des Zeitelementes dt auf die Flüssigkeit ausgeübt wird.

Ist nun jener wirbelfreie Anfangszustand der Flüssigkeit *gegeben*, und ist ausserdem (wie schon früher festgesetzt wurde) mittelst der

Functionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ..., auch die Bewegung der beiden Ringe *gegeben*, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit völlig bestimmt sein.

Die in irgend einem Zeitelement dt dieser Bewegung von den beiden Ringen, mittelst der Druckkräfte p, auf die Flüssigkeit ausgeübte Arbeit dS hängt offenbar wesentlich ab von denjenigen Zuwüchsen $d\alpha$, $d\beta$, ..., welche die Parameter α, β, ... während des Zeitelementes dt erfahren, und wird also die Form haben:

$$(3.)\qquad dS = S_1 d\alpha + S_2 d\beta + \ldots\ldots,$$

wo die S_1, S_2, ... noch *völlig unbekannte Grössen* vorstellen. Dementsprechend wird die virtuelle Arbeit δS sich ausdrücken durch

$$(4.)\qquad \delta S = S_1 \delta\alpha + S_2 \delta\beta + \ldots\ldots,$$

wo $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... willkührliche Grössen sind; sodass also dieses δS diejenige Arbeit repräsentirt, welche von jenen Druckkräften p geleistet werden würde, falls man die Ringe aus der Position $(\alpha, \beta, \ldots)$ nicht in die Position $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta \ldots)$, sondern in die willkürlich gewählte Position $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta, \ldots)$ übergehen lassen wollte.

Soweit sind die Dinge leicht zu übersehen. Hingegen wird man über den analytischen Ausdruck der *lebendigen Kraft T der Flüssigkeit*, ohne tiefer gehende Untersuchungen, sich schwerlich eine deutliche Vorstellung zu machen im Stande sein. Die genauere Untersuchung zeigt indessen, dass dieses T folgende Gestalt besitzen muss:

$$(5.)\qquad T = \Theta_0 + \left[\Theta_{11}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\Theta_{12}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \ldots\ldots\right],$$

wo der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck in Bezug auf die Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots\ldots$ ein homogener Ausdruck zweiten Grades ist, während andrerseits die Θ's lediglich Functionen der α, β, ... selber, nämlich unabhängig von deren Differentialquotienten sind.

Um nun unsern Betrachtungen eine möglichst einfache Gestalt zu verleihen, wollen wir die gegebene Bewegung der beiden Ringe als eine *unendlich langsame*; mithin die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots\ldots$ als *unendlich klein* uns vorstellen. Alsdann reducirt sich der Ausdruck (5.) auf sein erstes Glied Θ_0. Es hat mithin in diesem Fall die lebendige Kraft T der Flüssigkeit den Werth:

$$(6.)\qquad T = \Theta_0 = \Theta_0(\alpha, \beta, \ldots),$$

also einen Werth, der nur noch von den α, β, ... selber, nicht aber von deren Differentialquotienten abhängt.

Man kann den Werth dieser Function $\Theta_0 = \Theta_0 (\alpha, \beta, \cdots)$ näher angeben, sobald man voraussetzt, dass die Ringe unendlich dünn, d. i. von unendlich kleinem Querschnitt sind. In diesem Fall ist nämlich das Θ_0 identisch mit demjenigen elektrodynamischen Potential, welches die beiden Ringe auf einander ausüben würden, falls man sich jeden derselben durchflossen denken wollte von einem elektrischen Strom von gewisser *constanter* Stärke; wie solches sich ergibt aus den betreffenden Arbeiten von *Kirchhoff* und *Boltzmann* (Crelle's Journal, Bd. 71 u. 73).

Auch geben die *Boltzmann*'schen Untersuchungen einigermassen Aufschluss über den *zweiten* Theil der lebendigen Kraft, d. i. über den Ausdruck

$$\Theta_{11} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\Theta_{12} \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \cdots.$$

Dieser zweite Theil entspricht nämlich dem in der Boltzmann'schen Arbeit mit Q bezeichneten Potential. (Crelle's Journal, Bd. 73. S. 123 und 133.)

Ich habe hier diese Arbeiten von Kirchhoff und Boltzmann hauptsächlich deswegen erwähnt, weil aus denselben mit Sicherheit hervorgeht, *dass der Ausdruck* $\Theta_0 = \Theta_0 (\alpha, \beta, \ldots)$ *im Allgemeinen weder Null, noch constant, sondern eine wirkliche Function von* $\alpha, \beta, \ldots.$ *ist.*

Dies constatirt, wollen wir nun auf die Bewegung der betrachteten Flüssigkeit die Formeln (1.), (2.) in Anwendung bringen, indem wir dabei, einerlei ob der Querschnitt der Ringe klein oder gross ist, nur die *eine* Voraussetzung eintreten lassen, dass die Bewegung der Ringe *unendlich langsam* vor sich geht. Die beiden Formeln (1.) und (2.) nehmen alsdann mit Benutzung der Werthe (6.) und (3), (4.) die Gestalt an

$$\text{(I.)} \qquad d\Theta_0 = dS,$$

$$\text{(II.)} \quad \int_{t_0}^{t_1} \left(\left[\frac{\partial \Theta_0}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta} \delta\beta + \cdots \right] + \left[S_1 \delta\alpha + S_2 \delta\beta + \cdots \right] \right) dt = 0.$$

Aus (II.) folgt aber, weil die $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots.$ willkürlich sind, nach bekannter Schlussweise:

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial \alpha} = -S_1,$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta} = -S_2,$$

etc. etc.

also, falls man mit $d\alpha, d\beta, \ldots$ multiplicirt und addirt:

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta} d\beta + \cdots = -(S_1 d\alpha + S_2 d\beta + \cdots),$$

also mit Rücksicht auf (3.):

(II.a) $$d\Theta_0 = -dS.$$

Diese Formel (II.a) steht aber mit (I.), d. i. mit dem Princip der lebendigen Kraft in *diametralem Widerspruch*, und ist daher *absolut unrichtig.* Mit andern Worten: Die aus dem *Hamilton'schen Princip* abgeleitete Formel (II.) führt bei weiterer Behandlung zu einer Formel (II.a), welche durchaus falsch ist. Untersucht man nun den inneren Grund dieses Widerspruchs, so findet man einerseits, dass die Formel (II.) resp. (2.) *nicht* auf legitime Weise aus dem Hamilton'schen Princip abgeleitet ist, und dass andrerseits bei wirklich correcter Benutzung des genannten Princips eine *andere* Formel sich ergibt, welche mit der Formel (2.) völlig identisch ist, nur mit dem Unterschiede, dass in ihr an Stelle von T ein gewisser *anderer* Ausdruck sich vorfindet von mehr complicirter Gestalt.

Oder genauer und zugleich allgemeiner ausgedrückt: *Befinden sich im Innern der incompressiblen Flüssigkeit beliebig viele und beliebig gestaltete starre Körper, und bewegen sich diese Körper in beliebiger Weise und mit beliebigen Geschwindigkeiten, so wird die lebendige Kraft T der Flüssigkeit, was ihren analytischen Ausdruck betrifft, stets die Form haben:*

(A.) $$T = \Theta_0 + \left[\Theta_{11}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\Theta_{12}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\cdot\right].$$

Dabei bezeichnen α, β, ... diejenigen Parameter, durch welche die augenblickliche Lage jener Körper sich bestimmt. Ferner ist der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck in Bezug auf die Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ... ein homogener Ausdruck zweiten Grades. Endlich sind die Θ's nur abhängig von den α, β, ... selber, nicht aber von deren Differentialquotienten.

Wird nun das Hamilton'sche Princip auf die Bewegung der Flüssigkeit in wirklich correcter Weise angewendet, so gelangt man dabei zu folgender Formel:

(B.) $$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta\left[T - 2\Theta_0 - A\frac{d\alpha}{dt} - B\frac{d\beta}{dt} - C\frac{d\gamma}{dt} - \cdots\cdot\right] + \delta S\right)dt = 0,$$

wo δS die virtuelle Arbeit der von jenen starren Körpern auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte bezeichnet. Dabei haben T und Θ_0 die in (A.) angegebene Bedeutung; während andererseits die A, B, C, ... gewisse Functionen von α, β, γ, ... repräsentiren.

Sind insbesondere jene Körper von solcher Gestalt, dass der von

der Flüssigkeit occupirte Raum ein *einfach zusammenhängender* ist, so verschwindet das Θ_0, und ebenso verschwinden alsdann auch die A, B, C, ..., sodass also in diesem besonderen Fall die Formel die einfachere Gestalt erhält:

$$(\text{B}'.) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta S)\, dt = 0.$$

Diese letztere Formel, welche ich vorhin die *gewöhnliche* Formel des Hamilton'schen Princips nannte, ist also nur giltig für einen ganz *speciellen* Fall, nicht aber von allgemeiner Bedeutung.

Die Sätze (A.), (B.) sollen im Folgenden näher begründet werden. Und dabei mag es mir gestattet sein, an Stelle der von den starren Körpern auf die Flüssigkeit ausgeübten Arbeiten dS, δS, *diejenigen* Arbeiten dL, δL einzuführen, welche umgekehrt die Flüssigkeit auf jene Körper ausübt; sodass also, (wie man leicht übersieht) die Relationen stattfinden werden $dL = -dS$, und $\delta L = -\delta S$.

Uebrigens werde ich die anzustellenden Untersuchungen in etwas *allgemeinerer* Weise ausführen, als hier vorläufig angegeben wurde.

Einerseits nämlich werde ich annehmen, dass die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper nicht starr, sondern ihrer Gestalt nach veränderlich sind.

Andrerseits werde ich annehmen, dass auf die Flüssigkeit von aussen her etwa die Schwerkraft oder irgend welche andere Kräfte einwirken. Das Potential dieser gegebenen äusseren Kräfte mag mit V oder $V(x, y, z)$ bezeichnet werden. — Ich werde sogleich die zu behandelnde Aufgabe in mehr sorgfältiger Weise exponiren.

§ 2.

Die zu behandelnde Aufgabe.

Eine incommpressible Flüssigkeit sei begrenzt von einer äusseren Fläche σ_0, und beliebig vielen inneren Flächen σ_1, σ_2, σ_3, ... Jede solche Fläche mag nach Belieben entweder als eine *dünne Membran*, oder auch als die *Oberfläche eines starren Körpers* gedacht werden. Im letzteren Fall sind alsdann σ_1, σ_2, σ_3, ... die Oberflächen irgend welcher in die Flüssigkeit eingetauchten Körper, und σ_0 die innere Begrenzungsfläche einer die Flüssigkeit umschliessenden Schaale.

Der grösseren Allgemeinheit willen erscheint es zweckmässig, die *erstere* Vorstellung zu acceptiren, nämlich jene Flächen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, ... als dünne Membranen zu betrachten die ihrer *Lage* und *Gestalt* nach veränderlich sind.

Und zwar mag die augenblickliche Lage und Gestalt dieser Membranen abhängig sein von irgend welchen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$; so dass also die Coordinaten ξ, η, ζ irgend eines Membran-Elementes $d\sigma$ und ebenso auch die Richtungs-Cosinus der auf $d\sigma$ errichteten Normale N bestimmte Functionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sind; was angedeutet werden mag durch die Formeln:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} \xi &= \xi(\alpha, \beta, \ldots), & \cos(\mathsf{N}, x) &= \varphi(\alpha, \beta, \ldots), \\ \eta &= \eta(\alpha, \beta, \ldots), & \cos(\mathsf{N}, y) &= \psi(\alpha, \beta, \ldots), \\ \zeta &= \zeta(\alpha, \beta, \ldots), & \cos(\mathsf{N}, z) &= \chi(\alpha, \beta, \ldots). \end{aligned}$$

Dabei soll unter N stets diejenige Normale des Elements $d\sigma$ verstanden werden, welche der Flüssigkeit abgewendet ist. Auch soll angenommen werden, dass die Axen x, y, z des zu Grunde gelegten Coordinatensystems *absolut fest* liegen.

Wir wollen den von der Flüssigkeit occupirten und von den Membranen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ begrenzten Raum mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen, und den Zuwachs $d\mathfrak{R}$ zu berechnen versuchen, welchen dieser Raum $\mathfrak{R}$ erfahren wird, falls man jene Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ um beliebige unendlich kleine Grössen $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta, \ldots$ anwachsen lässt.

Bei einem solchen Anwachsen der Parameter erleidet das Element $d\sigma$ eine kleine Verschiebung, indem seine Coordinaten ξ, η, ζ anwachsen um

$$(2.)\qquad \begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta + \cdots \\ d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} d\beta + \cdots \\ d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} d\beta + \cdots \end{aligned}$$

Demgemäss wird die Grenze des Raumes $\mathfrak{R}$ in der Richtung der auf $d\sigma$ errichteten Normale N um eine Strecke dN vorrücken, welche die Länge hat:

$$(3.)\qquad d\mathsf{N} = d\xi \cos(\mathsf{N}, x) + d\eta \cos(\mathsf{N}, y) + d\zeta \cos(\mathsf{N}, z),$$

woraus durch Substitution der Werthe (2.) sich ergiebt:

$$(4.)\qquad d\mathsf{N} = \mathsf{A}\, d\alpha + \mathsf{B}\, d\beta + \Gamma\, d\gamma + \Delta\, d\delta + \cdots.$$

Dabei repräsentiren alsdann A, B, Γ, Δ, ... folgende Ausdrücke:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, z), \\ \mathsf{B} &= \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \cos(\mathsf{N}, z), \end{aligned}$$

etc. etc. etc.

also Ausdrücke, die für ein gegebenes Membran-Element $d\sigma$, ebenso wie ξ, η, ζ, cos (N, x), cos (N, y), cos (N, z), [vgl. (1.)], bestimmte Functionen von α, β, γ, δ, ... sind; was angedeutet werden mag durch die Formeln:

$$\text{(6.)} \qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathsf{A}(\alpha, \beta, \ldots.), \\ \mathsf{B} &= \mathsf{B}(\alpha, \beta, \ldots.), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Das zu berechnende $d\mathfrak{R}$ ist offenbar ein *schaalenförmiger Raum*, und $d\mathsf{N}$ die Dicke dieses schaalenförmigen Raumes an der Stelle des Elementes $d\sigma$. Demgemäss hat $d\mathfrak{R}$ den Werth $d\mathfrak{R} = \sum d\mathsf{N}d\sigma$, d. i. den Werth:

$$\text{(7.)} \qquad d\mathfrak{R} = \iint_{\mathfrak{R}} d\mathsf{N}d\sigma,$$

wo das doppelte Integralzeichen ein *Flächenintegral* andeutet, und wo insbesondere der beigefügte Index $\mathfrak{R}$ bemerklich machen soll, dass dieses Flächenintegral sich auszudehnen hat über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes $\mathfrak{R}$ (d. i. über alle Membranen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, ...). Aus (7.) folgt schliesslich durch Substitution des Werthes (4.):

$$d\mathfrak{R} = \iint_{\mathfrak{R}} (\mathsf{A}d\alpha + \mathsf{B}d\beta + \Gamma d\gamma + \cdots)\, d\sigma,$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{(8.)} \quad d\mathfrak{R} = \left(\iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{A}d\sigma\right) d\alpha + \left(\iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{B}d\sigma\right) d\beta + \left(\iint_{\mathfrak{R}} \Gamma d\sigma\right) d\gamma + \cdots.$$

Genaueres über die Einführung der Parameter α, β, γ, δ, ... — Wir setzen gegenwärtig fest, die Beweglichkeit der Membranen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, ... solle keine ganz beliebige, sondern von solcher Art sein, dass der von ihnen begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ seinem *Volumen* nach *constant* bleibt, sodass also jene Membranen niemals aufhören, die *vollständige Begrenzung* der gegebenen incompressiblen Flüssigkeit auszumachen. *Und demgemäss mögen die Parameter α, β, γ, δ, ... in solcher Weise eingeführt gedacht werden, dass das Volumen $\mathfrak{R}$ bei beliebigen Aenderungen der α, β, γ, δ, ... stets denselben Werth bewahrt.* Dann ist also das $d\mathfrak{R}$ für *beliebige* Werthe von $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$, ... stets $= 0$, woraus mit Rücksicht auf (8.) die Formeln sich ergeben:

$$\text{(9.)} \qquad \begin{aligned} \iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{A}d\sigma &= 0, \\ \iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{B}d\sigma &= 0, \\ &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

und zwar als *allgemein* gültig für beliebige Werthe der α, β, γ, δ, .

Beispiele. — Ist die Flüssigkeit umschlossen von einer *festaufgestellten* Kugelschaale, und ist innerhalb der Flüssigkeit irgend ein starrer Körper *nach Belieben beweglich*, so sind im Ganzen *sechs* Parameter α, β, γ, δ, ε, ζ vorhanden. Denn als solche werden einzuführen sein diejenigen sechs Variablen, durch welche die augenblickliche Lage jenes starren Körpers sich bestimmt.

Ist ferner, um ein anderes Beispiel anzuführen, die Flüssigkeit begrenzt von zwei um einen *festen* Mittelpunct beschriebenen Ellipsoidflächen σ_0 und σ_1, deren Axenrichtungen ebenfalls *fest*, deren Axen*längen* $2a_0$, $2b_0$, $2c_0$ und $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$ aber *variabel* sind, so darf, nach der von uns getroffenen Festsetzung, diese Variabilität keine ganz beliebige sein. Denn das Volumen

$$\frac{4\pi a_0 b_0 c_0}{3} - \frac{4\pi a_1 b_1 c_1}{3}$$

des von den beiden Flächen begrenzten Raumes $\mathfrak{R}$ soll *constant* bleiben; und es muss also die Relation erfüllt sein:

$$a_0 b_0 c_0 - a_1 b_1 c_1 = K,$$

wo K eine gegebene Constante vorstellt. Demgemäss werden in diesem Fall nicht sechs, sondern nur *fünf* Parameter α, β, γ, δ, ε einzuführen sein, etwa mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, & a_1 &= \delta, \\ b_0 &= \beta, & b_1 &= \varepsilon, \\ c_0 &= \gamma, & c_1 &= \frac{\alpha\beta\gamma - K}{\delta\varepsilon}. \end{aligned}$$

Diese fünf Parameter α, β, γ, δ, ε können alsdann *beliebige* Werthe annehmen, wenigstens innerhalb eines gewissen Spielraumes. Denn selbstverständlich muss dafür gesorgt sein, dass bei irgend welchen Aenderungen von α, β, γ, δ, ε die eine Fläche stets *innerhalb* der andern bleibt.

Das zu behandelnde Problem. — Auf die Flüssigkeit mögen von Aussen her irgend welche Kräfte einwirken, deren Potential

$$V = V(x, y, z) \tag{10.}$$

eine gegebene stetige Function der Coordinaten ist. Dies vorausgesetzt, stellen wir uns folgende Aufgabe:

Die Parameter α, β, γ, δ, ... *seien gegeben als bestimmte Functionen der Zeit:*

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \quad \gamma = \gamma(t), \quad \delta = \delta(t), \quad \text{etc. etc.,} \tag{11.}$$

sodass also die die Flüssigkeit begrenzenden Membranen in bestimmt vorgeschriebener Bewegung sich befinden. Alsdann sind offenbar

(12.) *die Lage und Gestalt des Raumes* $\mathfrak{R}$,

und ebenso die irgend einem Membran-Element $d\sigma$ *zugehörigen Grössen*

$$(13.)\quad \begin{cases} \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \cos(\mathsf{N}, x),\ \cos(\mathsf{N}, y),\ \cos(\mathsf{N}, z), & \text{[vgl. (1.)]} \\ \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \Gamma,\ \Delta,\ \ldots & \text{[vgl. (6.)]} \end{cases}$$

bekannte Functionen der Zeit.

Ferner sei gegeben der Anfangszustand der Flüssigkeit, etwa ihr Zustand zur Zeit t_0.

Hierdurch wird alsdann die Bewegung der Flüssigkeit völlig bestimmt sein. Diese Bewegung soll nun näher untersucht werden; und insbesondere sollen auch untersucht werden diejenigen

$$(14.)\qquad \textit{Druckkräfte } p,$$

welche in irgend einem Augenblick t dieser Bewegung von der Flüssigkeit auf die ihr anliegenden Membranen ausgeübt werden.

In letzterer Beziehung bieten sich verschiedene Fragen dar. Repräsentirt z. B. σ_j irgend eine *specielle* unter den Flächen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, ..., etwa die Oberfläche eines in die Flüssigkeit eingetauchten *starren Körpers*, so kann man nach der *translatorischen Kraft* fragen, mit welcher die zur Zeit t auf diesen Körper einwirkenden Druckkräfte p denselben nach einer gegebenen Richtung hin fortzuziehen bestrebt sind, oder auch nach dem *Drehungsmoment*, mit welchem sie den Körper um eine gegebene Axe zu drehen bestrebt sind.

Diese und ähnliche Fragen kann man unter einen allgemeinern Gesichtspunct bringen, indem man nach derjenigen *Arbeit* fragt, welche jene auf die Membran σ_j einwirkenden Kräfte p bei irgend einer *virtuellen Verrückung* dieser Membran leisten würden. Und hierbei kann diese Verrückung ganz beliebig gedacht werden, z. B. verbunden mit irgend welcher *Gestalts*veränderung der Membran.

Endlich kann man die Frage noch weiter verallgemeinern, indem man *sämmtliche* Membranen σ_0, σ_1, σ_2, ... *gleichzeitig* irgend welchen virtuellen Verrückungen unterwirft, und nach derjenigen Arbeit fragt, welche bei diesen Verrückungen von jenen Druckkräften p geleistet wird. Diese letztgenannte Arbeit hat offenbar den Werth:

$$(15.\text{a})\qquad \delta L = \iint_{\mathfrak{R}} p\,\big(\delta\xi\cos(\mathsf{N}, x) + \delta\eta\cos(\mathsf{N}, y) + \delta\zeta\cos(\mathsf{N}, z)\big)\, d\sigma,$$

wo $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die virtuelle Verrückung des Elementes $d\sigma$ (ξ, η, ζ) vorstellen, und wo die Integration ausgedehnt zu denken ist über sämmtliche Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes $\mathfrak{R}$. Dabei bezeichnet N (ebenso wie früher) die der Flüssigkeit abgewendete Normale des Elementes $d\sigma$, also zugleich die Richtung der auf $d\sigma$ einwirkenden Druckkraft p.

Nimmt man insbesondere für $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ diejenigen virtuellen Verrückungen, welche sich ergeben, sobald man die Parameter α, β, ... um irgend welche Grössen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... anwachsen lässt, setzt man also:

$$\delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\delta\beta + \cdots,$$
$$\delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial\beta}\delta\beta + \cdots,$$
$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\delta\beta + \cdots,$$

so ergiebt sich aus (15. a) für δL der Ausdruck:

(15. b) $$\delta L = \iint_{\mathfrak{M}} p\,(\mathsf{A}\delta\alpha + \mathsf{B}\delta\beta + \Gamma\delta\gamma + \cdots)\,d\sigma, \qquad \text{[vgl. (5.)]}$$

also ein Ausdruck von der Form:

(15. c) $$\delta L = L_1\delta\alpha + L_2\delta\beta + L_3\delta\gamma + \cdots.$$

Ein specieller Fall der *virtuellen* Arbeit δL ist die *wirkliche* Arbeit dL, welche analog mit (15. a, b, c) ausgedrückt werden kann entweder durch:

(16. a) $$dL = \iint_{\mathfrak{M}} p\,\big(d\xi\cos(\mathsf{N},x) + d\eta\cos(\mathsf{N},y) + d\zeta\cos(\mathsf{N},z)\big)\,d\sigma,$$

oder durch:

(16. b) $$dL = \iint_{\mathfrak{M}} p\,(\mathsf{A}d\alpha + \mathsf{B}d\beta + \Gamma d\gamma + \cdots)\,d\sigma,$$

oder durch:

(16. c) $$dL = L_1 d\alpha + L_2 d\beta + L_3 d\gamma + \cdots.$$

Dabei haben alsdann die L_1, L_2, L_3, ... in (16. c), ebenso wie in (15. c) die Werthe:

(17.) $$L_1 = \iint_{\mathfrak{M}} p\mathsf{A}\,d\sigma,\quad L_2 = \iint_{\mathfrak{M}} p\mathsf{B}\,d\sigma,\quad L_3 = \iint_{\mathfrak{M}} p\Gamma\,d\sigma,$$

etc. etc.,

und A, B, Γ, ... die in (5.) angegebenen Bedeutungen.

Sowohl dL wie δL beziehen sich auf diejenigen Druckkräfte p, welche stattfinden in irgend einem Augenblick t der *wirklichen* Bewegung. Während aber dL die Arbeit repräsentirt, welche diese Kräfte leisten bei der *wirklichen* Bewegung, nämlich beim Uebergang der Membranen aus der Position (α, β, . . .) in die Position ($\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, . . ,); repräsentirt andrerseits das δL diejenige Arbeit, welche die genannten Kräfte leisten würden bei einer gewissen *virtuellen* Bewegung, nämlich

beim Uebergang der Membranen aus der Position (α, β, ...) in die Position ($\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$, ...).

Unsere Hauptaufgabe wird nun bestehen in der näheren Bestimmung von δL und $d|L$, oder (was dasselbe ist), *in der Berechnung der in den Formeln* (15. c) *und* (16. c) *enthaltenen Coefficienten* L_1, L_2, L_3, ...

§ 3.

Zwei Methoden zur Lösung der gestellten Aufgabe.

Um jene durch die Formeln

$$(18.)\qquad \begin{aligned} L_1 &= \iint_{\mathfrak{R}} p\mathsf{A}d\sigma, \\ L_2 &= \iint_{\mathfrak{R}} p\mathsf{B}d\sigma, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

definirten Coefficienten L_1, L_2, ... wirklich zu berechnen, bietet sich *eine* Methode ganz direct dar, während eine *zweite* Methode mehr abseits liegt, und erst später zu Tage treten wird.

Die erste oder directe Methode besteht darin, dass man zuvörderst die unter den gegebenen Umständen eintretende Bewegung der Flüssigkeit, also z. B. auch den in ihrem Innern und an ihrer Oberfläche stattfindenden Druck p berechnet. Substituirt man sodann diesen Werth von p in die Formeln (18.), so erhält man sofort die gesuchten Grössen L_1, L_2, ...

Denn die übrigen in jenen Formeln enthaltenen Grössen A, B, ..., sowie auch der Integrationsraum $\mathfrak{R}$ sind von Hause aus bekannt, und zwar bekannt für jedweden Zeitaugenblick. [Vgl. (12.), (13.)]

Ueber die zweite, erst später zu eruirende Methode. — Bezeichnet m die Masse irgend eines Flüssigkeitstheilchens, so soll unter dem auf die Flüssigkeit ausgeübten *Gesammtpotential* W die Summe sämmtlicher m verstanden werden, jedes multiplicirt mit dem auf dasselbe ausgeübten Potential V:

$$(19. a)\qquad W = \sum\nolimits_{\mathfrak{R}} m V.$$

Andrerseits besitzt die *lebendige Kraft* T der Flüssigkeit den Werth:

$$(19. b)\qquad T = \tfrac{1}{2} \sum\nolimits_{\mathfrak{R}} m\,(u^2 + v^2 + w^2),$$

wo u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten des Theilchens m vorstellen. Der Index $\mathfrak{R}$ in diesen Formeln (19. a, b) deutet an, dass die Summation auszudehnen ist über alle Theilchen m des Raumes $\mathfrak{R}$, d. i. über alle Theilchen der gegebenen Flüssigkeit.

Bezeichnet man die gegebene *constante* Dichtigkeit der incompressiblen Flüssigkeit mit ϱ, so kann man $m = \varrho dxdydz$ setzen, mithin die Formeln (19. a, b) auch so schreiben:

$$W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dxdydz, \tag{20. a}$$

$$T = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (u^2 + v^2 + w^2)\, dxdydz, \tag{20. b}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $dxdydz$ des Raumes $\mathfrak{R}$.

Jene zweite Methode besteht nun darin, dass man die Werthe von W und T für die in Rede stehende Bewegung *wirklich berechnet*. Aus diesen W und T lassen sich alsdann die gesuchten Werthe der L_1, L_2, ... sofort ableiten mittelst einfacher Operationen.

Es finden nämlich, wie weiterhin gezeigt werden soll, zwischen den L_1, L_2, ... und zwischen W, T gewisse Relationen statt, welche die Berechnung der L_1, L_2, ... ermöglichen, sobald die Werthe der W, T bekannt sind. Diese Relationen stehen in naher Beziehung zu den Hamilton'schen Princip, und mögen demgemäss bezeichnet werden als *die dem Hamilton'schen Princip entsprechenden Formeln*. — Zuvörderst aber müssen wir Genaueres angeben über die eigentlichen Grundlagen unserer Untersuchung.

§ 4.

Die Prämissen der anzustellenden Untersuchung.

Erste Voraussetzung. — Die Bewegung der Flüssigkeit finde statt ohne irgend welche (innere oder äussere) Reibung, und unterliege den bekannten Differentialgleichungen:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - m \frac{\partial}{\partial x}\left(V + \frac{p}{\varrho}\right), \tag{A.}$$

etc. etc.

d. i. den Gleichungen:

$$m \frac{du}{dt} = - m \frac{\partial}{\partial x}\left(V + \frac{p}{\varrho}\right), \tag{B.}$$

etc. etc.

Hier bezeichnet m die Masse irgend eines Flüssigkeitstheilchens mit den Coordinaten x, y, z und den Geschwindigkeits-Componenten u, v, w; ferner p den an der Stelle x, y, z zur Zeit t vorhandenen hydrostatischen Druck; ferner ϱ die *constante Dichtigkeit* der Flüssigkeit; endlich $V = V(x, y, z)$ das gegebene Potential der von Aussen her einwirkenden Kräfte.

Betrachtet man die u, v, w nicht als die Geschwindigkeits-Componenten eines *bestimmten* Theilchens m, sondern vielmehr als Functionen des *Raumpunkts* x, y, z und der *Zeit* t, so nehmen die Gleichungen (B.) folgende Gestalten an:

$$\text{(C.)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(V+\frac{p}{\varrho}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(V+\frac{p}{\varrho}\right),\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{\partial}{\partial z}\left(V+\frac{p}{\varrho}\right). \end{aligned}$$

Differenzirt man nun die *zweite* der Gleichungen (C.) nach z, die *dritte* nach y, und subtrahirt man sodann die beiden Gleichungen von einander, so gelangt man mit Rücksicht auf die bekannte Incompressibilitätsbedingung:

$$\text{(D.)}\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

und unter Einführung der Bezeichnungen:

$$\text{(E.)}\qquad \begin{aligned} \Xi&=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\\ \mathsf{H}&=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\\ \mathsf{Z}&=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

zu der Formel:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t}+u\frac{\partial \Xi}{\partial x}+v\frac{\partial \Xi}{\partial y}+w\frac{\partial \Xi}{\partial z}=\Xi\frac{\partial u}{\partial x}+\mathsf{H}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathsf{Z}\frac{\partial u}{\partial z},$$

oder (was dasselbe ist) zu der ersten Formel des folgenden Systems:

$$\text{(F.)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\Xi}{dt}&=\Xi\frac{\partial u}{\partial x}+\mathsf{H}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathsf{Z}\frac{\partial u}{\partial z},\\ \frac{d\mathsf{H}}{dt}&=\Xi\frac{\partial v}{\partial x}+\mathsf{H}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathsf{Z}\frac{\partial v}{\partial z},\\ \frac{d\mathsf{Z}}{dt}&=\Xi\frac{\partial w}{\partial x}+\mathsf{H}\frac{\partial w}{\partial y}+\mathsf{Z}\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

dessen beide anderen Formeln sich in analoger Weise ableiten lassen. In diesen Gleichungen (F.) sind alsdann $d\Xi$, $d\mathsf{H}$, $d\mathsf{Z}$ diejenigen Zuwüchse, welche die einem bestimmten Flüssigkeitstheilchen m zugehörigen Grössen Ξ, H, Z während des Zeitelements dt erfahren.

Sind die einem Theilchen m zugehörigen Grössen Ξ, H, Z zu irgend einer Zeit gleich Null, so werden sie, wie aus (F.) *hervorgeht, für dieses Theilchen fortdauernd Null bleiben.*

Man kann mit *Helmholtz* die Grössen Ξ, H, Z die *Wirbelcomponenten* des betreffenden Theilchens m nennen, und demgemäss ein solches Theilchen als *wirbelfrei* bezeichnen, sobald seine Componenten Ξ, H, Z *Null* sind. Solches festgesetzt, können wir alsdann den soeben ausgesprochenen Satz auch so ausdrücken, resp. verallgemeinern:

Sind in einem gegebenen Zeitaugenblick sämmtliche Theilchen der Flüssigkeit *wirbelfrei*, so wird Gleiches von ihnen auch gelten in jedem späteren Zeitaugenblick.

Oder einfacher ausgedrückt: *Ist in einem gegebenen Augenblick die betrachtete Flüssigkeit wirbelfrei, so wird Gleiches von ihr auch gelten in jedem spätern Zeitaugenblick.**)

Zweite Voraussetzung. — Wir nehmen nun an, die gegebene Flüssigkeit sei *wirbelfrei* zur Zeit t_0 ihres *Anfangszustandes*, sie genüge also zur Zeit t_0 an allen Stellen den Bedingungen $\Xi = 0$, $H = 0$, $Z = 0$, d. i. den Formeln:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Gleiches findet alsdann (zufolge des letzten Satzes) auch statt zu jeder *spätern* Zeit t; *sodass also u, v, w in jedwedem Zeitaugenblick t der zu betrachtenden Bewegung die Form besitzen:*

$$(1.) \qquad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

wo $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ eine noch unbekannte Function bezeichnet.

Mittelst dieser Formeln (1.) reduciren sich aber die *drei* Differentialgleichungen (C.) auf *eine einzige*, nämlich auf folgende:

$$(2.) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + V + \frac{p}{\varrho} = H(t),$$

wo $H(t)$ eine unbekannte Function der Zeit vorstellt, nämlich eine Grösse, die *unabhängig* von x, y, z ist.

Dritte Voraussetzung. — Die Bewegung der Flüssigkeit sei von solcher Art, dass

---

*) Dieser wichtige Satz ist bekanntlich schon von *Lagrange* ausgesprochen worden. Der hier gegebene elegante und einfache Beweis ist meines Wissens zuerst von *Helmholtz* gegeben worden in seinem Aufsatz: *Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* (Crelle's Journal, Bd. 55, S. 25).

(3.) u, v, w, p *stetige* Funktionen von x, y, z, t

sind. Hieraus folgt nach (1.), dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{4.}$$

ebenfalls *stetige* Functionen von x, y, z, t sein werden.

Substituirt man, beiläufig bemerkt, die Werthe (1.) in die bekannte Incompressibilitäts-Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so ergiebt sich, dass Φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{d. i. } \Delta\Phi = 0 \tag{5.}$$

entsprechen muss.

Vierte Voraussetzung. — Es soll angenommen werden, dass die zu Anfang mit den Membranen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots.$ in Berührung begriffenen Flüssigkeitstheilchen, *fortdauernd* mit denselben in Berührung bleiben; sodass also die Bewegung eines solchen Flüssigkeitstheilchen nur in einem *Fortgleiten* längs der betreffenden Membran besteht.*)

Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir die Membran σ_j, und zugleich die längs derselben fortgleitenden Flüssigkeitstheilchen. Die Membran σ_j ist in irgend welcher Bewegung, resp. Formveränderung begriffen. Sie mag zur Zeit t durch die Gleichung dargestellt sein

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0, \tag{α.}$$

folglich zur Zeit $t + dt$ durch die Gleichung:

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t + dt) = 0, \tag{β.}$$

wo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten vorstellen sollen. Repräsentirt also μ irgend ein *Molecül* dieser Membran σ_j, und bezeichnet man die Coordinaten von μ zu den Zeiten t und $t + dt$ respective mit

$$\xi, \eta, \zeta$$

und

$$\xi + d\xi, \quad \eta + d\eta, \quad \zeta + d\zeta,$$

so werden die erstern der Gleichung (α.), die letztern der Gleichung (β.) Genüge leisten; sodass man erhält:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0,$$
$$f(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta, t + dt) = 0,$$

---

*) Man vgl. übrigens die Bemerkung von *Kirchhoff* in seinen Vorl. über Math. Physik. 1876. Seite 108.

und hieraus durch Subtraction:

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \text{ wo } f = f(\xi, \eta, \zeta, t).$$

Nun bleiben die zu Anfang mit der Membran σ_j in Berührung begriffenen Flüssigkeitstheilchen m, nach unserer Voraussetzung, *fortdauernd* mit derselben in Berührung. Betrachten wir insbesondere dasjenige dieser Theilchen m, welches die Membran σ_j zur Zeit t *an der Stelle* μ, d. i. im Punkte

$$\xi, \eta, \zeta$$

berührt, und bezeichnen wir den noch unbekannten Punct, in welchem dasselbe die Membran σ_j zur Zeit $t + dt$ berühren wird, mit

$$\xi + dx,\ \eta + dy,\ \zeta + dz,$$

so werden diese Berührungspuncte resp. den Gleichungen (α.) und (β.) Genüge leisten. Somit folgt:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0,$$
$$f(\xi + dx, \eta + dy, \zeta + dz, t + dt) = 0,$$

und hieraus durch Subtraction:

$$(\delta.)\qquad \frac{\partial f}{\partial \xi}dx + \frac{\partial f}{\partial \eta}dy + \frac{\partial f}{\partial \zeta}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \text{ wo } f = f(\xi, \eta, \zeta, t).$$

Aus (γ.), (δ.) folgt jetzt aber sofort:

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{\partial f}{\partial \xi}(dx - d\xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(dy - d\eta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(dz - d\zeta) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(\zeta.)\quad (dx - d\xi)\cos(\mathsf{N}, x) + (dy - d\eta)\cos(\mathsf{N}, y) + (dz - d\zeta)\cos(\mathsf{N}, z) = 0,$$

oder falls man durch dt dividirt, und die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ des Flüssigkeitstheilchens m mit u, v, w bezeichnet

$$(\eta.)\quad \left(u - \frac{d\xi}{dt}\right)\cos(\mathsf{N}, x) + \left(v - \frac{d\eta}{dt}\right)\cos(\mathsf{N}, y) + \left(w - \frac{d\zeta}{dt}\right)\cos(\mathsf{N}, z) = 0,$$

oder, falls man für u, v, w die Werthe (1.) p. 15 substituirt:

$$(\vartheta.)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = \frac{d\xi}{dt}\cos(\mathsf{N}, x) + \frac{d\eta}{dt}\cos(\mathsf{N}, y) + \frac{d\zeta}{dt}\cos(\mathsf{N}, z).$$

Dabei repräsentirt (wie früher) das N die auf der betrachteten Membran errichtete, der Flüssigkeit abgewendete Normale.

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Membrantheilchens μ sind abhängig von den Parametern α, β, γ, δ, ..., und diese Parameter ihrerseits sind gegebenen Functionen der Zeit (vgl. p. 9). Somit folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$$

Demgemäss nimmt die Formel (ϑ.) die Gestalt an:

$$(\iota.) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}} = \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \Gamma\frac{d\gamma}{dt} + \Delta\frac{d\delta}{dt} + \cdots,$$

wo $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta, \ldots$ die mehrfach erwähnten Ausdrücke (5.) p. 7 vorstellen.

Für einen gegebenen Zeitaugenblick t sind die Lage und Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$ *vollständig bekannt*, oder (um ein anderes Wort zu brauchen) *in bestimmter Weise vorgeschrieben*. Gleiches aber gilt in dem gegebenen Zeitaugenblick auch von denjenigen Werthen, welche die rechte Seite der Formel (ϑ.) oder (ι.) für die einzelnen Oberflächenelemente $d\sigma$ dieses Raumes $\mathfrak{R}$ besitzt. [Vergl. die Bemerkungen bei (12.), (13.) p. 9]. So ergiebt sich der Satz:

In einem gegebenen Zeitaugenblick t sind die Lage und Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$ in bestimmter Weise vorgeschrieben. Und die noch unbekannte Function $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ muss von solcher Beschaffenheit sein, dass ihr Differentialquotient $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}}$ in jenem Augenblick an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ bestimmte vorgeschriebene Werthe besitzt. Diese vorgeschriebenen Werthe lassen sich analytisch ausdrücken nach Belieben entweder durch:

$$(6.) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}} = \frac{d\xi}{dt}\cos(\mathsf{N}, x) + \frac{d\eta}{dt}\cos(\mathsf{N}, y) + \frac{d\zeta}{dt}\cos(\mathsf{N}, z),$$

oder durch:

$$(6.\text{a}) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}} = \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \Gamma\frac{d\gamma}{dt} + \Delta\frac{d\delta}{dt} + \cdots$$

Im Allgemeinen wird der letzteren Formel, als der einfacheren, der Vorzug zu geben sein.

Bemerkung. — Multiplicirt man die Formel (6. a) mit $d\sigma$, und integrirt sodann über alle Elemente $d\sigma$ der Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, so erhält man:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma = \left(\iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{A}\,d\sigma\right)\frac{d\alpha}{dt} + \left(\iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{B}\,d\sigma\right)\frac{d\beta}{dt} + \cdots$$

also mit Rücksicht auf (9.) p. 8:

$$(7.) \qquad \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma = 0.$$

§ 5.

Die Grundformeln der Theorie.

Um nun unter den gegebenen Umständen die Bewegung der Flüssigkeit zu ermitteln, haben wir Φ, u, v, w, p als Functionen von x, y, z, t zu bestimmen. Und zu diesem Behuf haben wir im Ganzen *sechs* Formeln in Händen, nämlich die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) und (6.) resp. (6. a). Um diese sechs Formeln in eine mehr geeignete Reihenfolge zu versetzen, beginnen wir mit den auf Φ bezüglichen Formeln (4.), (5.) und (6. a):

(I. a) $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ sollen im Raume $\mathfrak{R}$ *stetig* sein.

(I. b) $\Delta\Phi$ soll im Raume $\mathfrak{R}$ überall $= 0$ sein,

(I. c) der Differentialquotient $\frac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}}$ soll an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ die *vorgeschriebenen* Werthe haben: $\frac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$

Sodann lassen wir folgen die u, v, w betreffenden Formeln (1.):

$$\text{(II.)} \qquad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Endlich fügen wir hinzu die zur Berechnung von p dienenden Bedingungen (2.), (3.):

$$\text{(III. a)} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + V + \frac{p}{\varrho} = H(t),$$

(III. b) p soll eine *stetige* Function von x, y, z, t sein.

Dabei bezeichnet $H(t)$ eine völlig unbekannte Function der Zeit, während ϱ die gegebene constante Dichtigkeit der Flüssigkeit vorstellt.

Hiermit sind alle Formeln erschöpft, die sich aus unsern Prämissen zur Bestimmung der Functionen Φ, u, v, w, p eruiren lassen. Und es fragt sich also zunächst, ob diese Formeln zur Bestimmung jener vier Functionen Φ, u, v, w, p wirklich ausreichend sind, — eine Frage, welche namentlich für Φ nicht ganz leicht zu beantworten ist.

Nehmen wir vorläufig an, Φ sei bereits bestimmt. Alsdann ergeben sich mittelst (II.) und (III. a) die zugehörigen Werthe von u, v, w, p. Das in solcher Weise berechnete p wird aber behaftet sein mit dem *unbekannten* additiven Gliede $\varrho\, H(t)$.

Wir sehen somit, dass wir den Druck p niemals vollständig zu bestimmen im Stande sind, sondern nur bis auf ein additives Glied, welches eine unbekannte Function der Zeit bleibt.

Diese Unvollkommenheit hat ihren Grund in der Natur der gestellten Aufgabe, wie sich leicht an einem speciellen Fall zeigen lässt.

Wir nehmen an, das Potential V sei $= 0$, und die Flüssigkeit befinde sich während des Anfangszustandes in *Ruhe,* eingeschlossen in eine elastische, völlig gleichmässig gearbeitete *kugelförmige Membran* (die etwa aus Gummi oder Kautschuck bestehen kann). In diesem Anfangszustande wird alsdann der Druck p im Innern der Flüssigkeit constant, etwa $= A$ sein.

Denken wir uns nun dieses System ringsum von Luft umgeben, und diese Luft durch irgend welche Vorrichtungen mehr und mehr verdichtet, so wird hierbei die Oberfläche der Flüssigkeitskugel (weil die Flüssigkeit incompressibel ist) völlig ungeändert bleiben, trotzdem aber der Druck p im Innern der Kugel, welcher zu Anfang $= A$ war, mehr und mehr wachsen, also eine *Function der Zeit* sein.

Und diese Function der Zeit kann offenbar nur dann bestimmt werden, wenn die von Aussen her (durch den Druck der Luft) auf die Membran ausgeübten Kräfte *bekannt* sind, und ebenso auch die elastischen Kräfte, mit denen die einzelnen Molecüle der Membran auf einander einwirken.

Analoges wie in diesem Beispiel wird in jedem andern Fall zu bemerken sein. *Wollte man also bei der vorgelegten allgemeinen Aufgabe jene unbekannte Function der Zeit, welche im Werthe von p als additives Glied sich einstellt, wirklich zu bestimmen versuchen, so müsste man vorher bekannt sein nicht allein mit dem Ruhe- resp. Bewegungszustande der Membranen, sondern überdiess auch mit sämmtlichen äussern und innern Kräften, unter deren Einwirkung jener Ruhe- resp. Bewegungszustand stattfindet.* — Eine solche Bekanntschaft aber haben wir *nicht* vorausgesetzt.

§ 6.

Allgemeine Betrachtungen über eine Function von x, y, z, deren erste Ableitungen nach x, y, z innerhalb eines gegebenen Raumes überall stetig sind.

Hinsichtlich des sogenannten Geschwindigkeitspotentiales $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ ist bekannt [vgl. (I. a)], dass seine Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ im Raume $\mathfrak{R}$ *überall stetig* sind. Indem wir nun die hieraus für Φ selber entspringenden Consequenzen näher untersuchen wollen, sind mehrere Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Raum $\mathfrak{R}$ *einfach zusammenhängend* ist, oder *zweifach zusammenhängend,* oder endlich *von ganz beliebiger Beschaffenheit.*

Einfach zusammenhängender Raum. — Man nennt bekanntlich einen Raum $\mathfrak{R}$ *einfach zusammenhängend,* wenn jedwede innerhalb $\mathfrak{R}$ construirte geschlossene Curve durch eine allmählig fortgehende Deformation und ohne dabei die Grenze von $\mathfrak{R}$ zu überschreiten, in einen unendlich kleinen Kreis resp. in einen Punkt verwandelt werden kann.

Demgemäss ist z. B. der Innenraum einer Kugelfläche oder Ellipsoidfläche ein *einfach zusammenhängender*. Denkt man sich ferner einen Raum $\mathfrak{R}$, der begrenzt ist von einer äusseren Fläche σ_0 und beliebig vielen inneren Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ und setzt man voraus, dass all' diese Flächen Kugelflächen oder Ellipsoidflächen sind, so wird der so definirte Raum $\mathfrak{R}$ wiederum ein *einfach zusammenhängender* sein.

Ist nun ein solcher einfach zusammenhängender Raum $\mathfrak{R}$ gegeben, sind ferner innerhalb dieses Raumes $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ gegeben als *stetige* Functionen von x, y, z, und ist endlich noch derjenige Werth Φ_0 gegeben, welchen Φ selber in irgend einem Puncte x_0, y_0, z_0 des Raumes $\mathfrak{R}$ besitzt, so bestimmt sich der Werth von Φ für irgend welchen andern Punct x, y, z des Raumes $\mathfrak{R}$ mittelst der Formel:

$$\Phi = \Phi_0 + \int_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right), \tag{1.}$$

die Integration hinerstreckt längs irgend welcher im Raume $\mathfrak{R}$ von x_0, y_0, z_0 nach x, y, z laufenden Curve A.

Dieser Formel zufolge scheint der Werth Φ im Puncte x, y, z mit abhängig zu sein von dem *Integrationswege* A; sodass man also möglicherweise, bei Anwendung eines *andern* solchen Weges B, im Puncte x, y, z an Stelle von Φ einen andern Werth Φ' erhalten würde:

$$\Phi' = \Phi_0 + \int_B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right). \tag{2.}$$

Um dies näher zu untersuchen, subtrahiren wir die beiden Formeln (1.), (2.), und erhalten alsdann:

$$\Phi - \Phi' = \int_C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right), \tag{3.}$$

oder was dasselbe ist:

$$\Phi - \Phi' = \int_C (u dx + v dy + w dz), \tag{4.}$$

die Integration hinerstreckt über die aus A und B zusammengesetzte *geschlossene* Curve C, und zwar in der Richtung von A.

Die Linien A, B, C liegen völlig innerhalb des Raumes $\mathfrak{R}$, und dieser ist nach unserer Voraussetzung ein *einfach zusammenhängender*. Folglich kann die geschlossene Curve C, durch stetige Deformationen und ohne dabei die Grenze des Raumes $\mathfrak{R}$ irgendwo zu überschreiten, in einen unendlich kleinen Kreis respective in einen Punct verwandelt werden. Die aufeinanderfolgenden Gestalten, welche jene Curve bei diesen stetigen Deformationen der Reihe nach annimmt, bilden also zusammengenommen ein *innerhalb* $\mathfrak{R}$ liegendes Flächenstück f, welches die ursprüngliche Curve C zur Randcurve hat. Nach einem bekannten

Satz*) kann alsdann aber das *Curven*-Integral (4.) umgewandelt werden in folgendes über die *Fläche* f sich ausdehnendes Integral:

$$(5.)\qquad \iint \left(\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) df.$$

Dabei bezeichnet df irgend ein Element der Fläche f, und gleichzeitig sind α, β, γ die Richtungscosinus der auf df errichteten Normale. Da nun $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, mithin z. B. $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ist, so wird das Integral (5.) offenbar $= 0$ sein. Und Gleiches gilt daher auch vom Integral (4.), d. i. von $\Phi - \Phi'$. Somit folgt:

$$(6.)\qquad \Phi = \Phi'.$$

Hiemit aber ist nachgewiesen, dass der Werth von Φ im Puncte x, y, z von dem angewandten Integrationswege A resp. B *völlig unabhängig* ist, also nachgewiesen, dass die Function Φ im Puncte x, y, z nur *einen* Werth haben kann.

Denkt man sich diesen einen Werth Φ nun z. B. dargestellt durch die Formel (1.), und lässt man in dieser Formel den Endpunct x, y, z des Integrationsweges A in *stetiger* Weise fortschreiten, so wird hiebei der Werth des Integrales, mithin auch der Werth von Φ sich Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändern. Demgemäss gelangen wir zu folgendem Satze:

Sind innerhalb eines einfach zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ *die Werthe von* $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ *gegeben als stetige Functionen von* x, y, z, *so wird* Φ *selber sich festsetzen lassen als eine Function, die innerhalb* $\mathfrak{R}$ *überall eindeutig und stetig ist.*

Und zwar bedarf es, um diese Function zu einer völlig bestimmten zu machen, nur noch der Angabe des Werthes, den Φ *in irgend einem speciellen Punct* x_0, y_0, z_0 *des Raumes* $\mathfrak{R}$ *besitzen soll.*

Zweifach zusammenhängender Raum. — Kann ein gegebener Raum $\mathfrak{R}$ mittelst eines *Querschnittes* q (d. i. mittelst einer durch das Innere von $\mathfrak{R}$ gelegten Fläche q, deren Randcurve in der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ liegt) in einen *einfach* zusammenhängenden Raum verwandelt werden, so heisst jener ursprünglich gegebene Raum $\mathfrak{R}$ ein *zweifach* zusammenhängender.

Denkt man sich z. B. eine ringförmige Rotationsfläche von kreisförmiger oder elliptischer oder vielleicht auch quadratischer Meridiancurve, so wird der Innenraum dieser Fläche ein *zweifach* zusammenhängender sein. Denn führt man durch diesen Raum etwa in der

*) Vgl. z. B. *Neumann: Theorie der elektrischen Kräfte.* Teubner, 1873, p. 88.

Ebene einer solchen Meridiancurve einen Querschnitt q, so verwandelt sich derselbe hierdurch in einen *einfach* zusammenhängenden Raum.

Denkt man sich ferner einen Raum $\mathfrak{R}$ begrenzt von zwei ineinander liegenden Flächen σ_0 und σ_1, und nimmt man an, die äussere Fläche σ_0 sei eine Kugelfläche, die innere Fläche σ_1 hingegen sei eine ringförmige Rotationsfläche, so wird jener Raum $\mathfrak{R}$ wiederum ein *zweifach* zusammenhängender sein. Denn construirt man innerhalb $\mathfrak{R}$ einen Querschnitt q, der einen Parallelkreis der Fläche σ_1 zur Randcurve hat, so verwandelt sich hierdurch der Raum $\mathfrak{R}$ in einen *einfach* zusammenhängenden Raum.

Sind nun innerhalb irgend eines *zweifach* zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ die Werthe von $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ gegeben als *stetige* Functionen von x, y, z, und denkt man sich jenen Raum $\mathfrak{R}$ mittelst eines Querschnittes q in einen *einfach* zusammenhängenden Raum $\mathfrak{S}$ verwandelt, so wird Φ selber (zufolge des vorhergehenden Satzes p. 22) innerhalb $\mathfrak{S}$ überall *eindeutig und stetig*, möglicherweise aber zu beiden Seiten der Fläche q mit *verschiedenen* Werthen behaftet sein. Bezeichnet man indessen diese Werthe von Φ zu beiden Seiten von q mit Φ_1 und Φ_2, und setzt:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varkappa,$$

so wird dieses $\varkappa$ an allen Stellen der Fläche q einerlei Werth haben. Denn die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sind im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ (nach unserer Voraussetzung) stetig, und haben also, was $\mathfrak{S}$ betrifft, zu beiden Seiten von q einerlei Werthe; demgemäss ist also $\frac{\partial (\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial (\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial (\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial z} = 0$; und hieraus folgt, dass $(\Phi_2 - \Phi_1)$ selber von x, y, z unahängig, also an allen Stellen der Fläche q von *einerlei* Werth ist. Q. e. d.

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Sind innerhalb eines zweifach zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ *die Werthe von* $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ *gegeben als stetige Functionen von* x, y, z, *und versteht man unter* q *irgend einen Querschnitt, durch welchen der Raum* $\mathfrak{R}$ *sich in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandeln würde, so lässt sich die Function* Φ *in solcher Weise festsetzen, dass sie im Raume* $\mathfrak{R}$, *bis auf den Querschnitt* q, *überall eindeutig und stetig, in diesem Querschnitt aber mit einer Differenz*

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varkappa$$

behaftet ist, welche an allen Stellen von q *ein und denselben Werth hat.*

Ein beliebig gegebener Raum $\mathfrak{R}$, der etwa von einer äusseren Fläche σ_0 und irgend welchen inneren Flächen σ_1, σ_2, σ_3, ... begrenzt ist, wird stets durch irgend welche Anzahl von Querschnitten in einen *einfach* zusammenhängenden Raum verwandelt werden können.

Sind z. B. im Ganzen *drei* solche Flächen σ_0, σ_1, σ_2 vorhanden, und hat die äussere Fläche σ_0 die Gestalt einer Kugelfläche, während jede der beiden innern Flächen σ_1, σ_2 die Gestalt einer ringförmigen Rotationsfläche besitzt, so wird der Raum $\mathfrak{R}$ mittelst *zweier* Querschnitte q_1 und q_2 in einen *einfach* zusammenhängenden Raum verwandelt werden können; wobei allerdings, was im Genauern die Lage jener Querschnitte betrifft, zwei Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem die beiden Ringflächen σ_1 und σ_2 *neben einander liegen*, oder aber (wie zwei Glieder einer Kette) *einander umschlingen.*

Im ersten Fall können die Querschnitte q_1 und q_2 etwa so ausgeführt werden, dass der Rand von q_1 ein Parallelkreis von σ_1, und der von q_2 ein Parallelkreis von σ_2 ist.

Im letztern Falle hingegen ist für q_1 ein Flächenstück zu nehmen, dessen *äusserer* Rand ein Parallelkreis von σ_1, und dessen *innerer* Rand eine Meridiancurve von σ_2 ist, sodann aber für q_2 ein Flächenstück, bei welchem umgekehrt der *äussere* Rand ein Parallelkreis von σ_2, und der *innere* eine Meridiancurve von σ_1 ist.

Analog wie vorhin werden wir nun offenbar bei einem *beliebig* gegebenem Raume zu folgendem Satz gelangen.

Sind innerhalb irgend eines Raumes $\mathfrak{R}$ die Werthe von $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ gegeben als stetige Functionen von x, y, z, und denkt man sich diejenigen Querschnitte construirt, durch welchen $\mathfrak{R}$ in einen einfach zusammenhängenden Raum übergeht, so wird sich die Function Φ in solcher Weise festsetzen lassen, dass sie im Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme jener Querschnitte, überall eindeutig und stetig ist, in jedem solchen Querschnitt q aber mit einer Differenz $\Phi_2 - \Phi_1 = \varkappa$ behaftet ist, welche an allen Stellen von q einerlei Werth hat.

Auch wird dieser Werth $\varkappa$ bei irgend welcher Deformation der Fläche q *ungeändert* bleiben. Denn man kann ja eine solche Deformation stets der Art ausführen, dass man zuerst nur einen *Theil* der Fläche q deformirt, und sodann die Deformation des andern Theiles folgen lässt. Demgemäss ist also hinzuzufügen,

dass die im Querschnitt q vorhandene Differenz $\varkappa$ für alle Stellen und alle Deformationen dieses Querschnittes ein und denselben Werth hat, — kurz, dass sie unabhängig ist von x, y, z.

Beiläufige Bemerkung. — Man könnte einen Raum $\mathfrak{R}$, der durch n Querschnitte in einen *einfach zusammenhängenden* Raum verwandelbar ist, als $(n+1)$*fach zusammenhängenden* bezeichnen. Doch würde hiezu (abgesehen davon, dass derartige Distinctionen für unsere Zwecke unnöthig sind) zuvörderst eine genauere Festsetzung über den *Begriff des Querschnittes* erforderlich sein.

§ 7.

Die charakteristischen Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials für den Fall eines einfach zusammenhängenden Raumes.

Die Anwendung der soeben gefundenen Sätze auf das Geschwindigkeitspotential Φ ist keinem Bedenken unterworfen, falls wir nur festhalten an der schon gemachten Voraussetzung, dass die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit u, v, w d. i. die Ableitungen jenes Potentials nach x, y, z durchweg *stetig* sein sollen, [vgl. (I. a) p. 19].

Ist also z. B. der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$ ein einfach zusammenhängender, so wird das Geschwindigkeitspotential Φ im Ganzen folgende Eigenschaften haben:

(I.) Φ *selber ist im Raume $\mathfrak{R}$ überall stetig;*

(I. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ *sind gleichfalls in $\mathfrak{R}$ überall stetig;*

(I. b) $\Delta\Phi$ *ist in $\mathfrak{R}$ überall* $= 0$;

(I. c) *an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ hat $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}$ die vorgeschriebenen Werthe:*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\cdots$$

In der That ergeben sich all' diese Eigenschaften in unmittelbarer Weise theils aus dem Satze p. 22, theils aus den Formeln p. 19.

Wir fügen hinzu: *Durch die eben genannten Eigenschaften* (I.), (I. a, b, c) *ist das Geschwindigkeitspotential*

(1.) $$\Phi$$

völlig bestimmt bis auf ein additives nur noch von der Zeit abhängendes Glied.

Beweis. — Sind nämlich Φ und Ψ *irgend zwei* den Bedingungen (I.), (I. a, b, c) entsprechende Functionen, und setzt man

(α.) $$\Phi - \Psi = \Omega,$$

so sind in Folge jener Bedingungen

(β.) Ω stetig im Raume $\mathfrak{R}$,

(γ.) $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ ebenfalls stetig im Raume $\mathfrak{R}$,

(δ.) $\Delta\Omega = 0$ im Raume $\mathfrak{R}$,

(ε.) $\frac{\partial\Omega}{\partial N} = 0$ an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Aus (β.), (γ.), (δ.) aber ergiebt sich mittelst eines bekannten Green'schen Satzes die Formel;

$$(\zeta.)\qquad \iiint_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2\right] dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} \Omega \frac{\partial\Omega}{\partial N} d\sigma,$$

die Integrationen links und rechts ausgedehnt über alle Volumelemente $dxdydz$ resp. über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes $\mathfrak{R}$. Aus (ζ.) folgt nun weiter mit Rücksicht auf (ε.)

$$(\eta.)\qquad \iiint_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2\right] dx dy dz = 0,$$

mithin:

$$(\vartheta.)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0.$$

Folglich hat Ω, d. i. $\Phi - \Psi$ einen von x, y, z unabhängigen Werth, und kann also nur noch eine Function der Zeit sein. *Q. e. d.*

Aus diesem Satze (1.) folgt nun weiter, *dass die Geschwindigkeits-Componenten der Flüssigkeit*:

$$(2.)\qquad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

durch die Bedingungen (I.), (I. a, b, c) *vollständig bestimmt sind.* Denn jenes unbekannte nur noch von der Zeit abhängende additive Glied im Werthe von Φ verschwindet bei Bildung der Ableitungen nach x, y, z.

Blickt man von Neuem zurück auf jene Bedingungen (I.), (I. a, b, c), so bemerkt man, dass dieselben wesentlich *abhängen von der gegebenen Bewegung der Membranen,* nämlich behaftet sind mit den diese Bewegung repräsentirenden Functionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ... Oder genauer ausgedrückt: Jene Bedingungen sind behaftet *einerseits* mit den augenblicklichen Werthen der $\alpha, \beta, \ldots$ *selber,* insofern als durch diese die augenblickliche Lage und Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$, wie auch die augenblicklichen Werthe der in (I. c) vorhandenen Functionen A, B, ... [vgl. (6.) p. 8] sich bestimmen; und *andrerseits* sind sie behaftet mit den augenblicklichen Werthen der *Differentialquotienten* $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots$, welche direct in (I. c) sich vorfinden.

Gleichzeitig bemerkt man, dass die Bedingungen (I.), (I. a, b, c) *durchaus unabhängig sind vom Anfangszustand der Flüssigkeit.*

Diese den Anfangszustand *ganz ignorirenden* Bedingungen sind aber trotzdem, wie aus Satz (2.) ersichtlich, zur Bestimmung der Bewegung der Flüssigkeit, nämlich zur Bestimmung ihrer Geschwindigkeits-Componenten u, v, w, bereits völlig ausreichend. Wir können somit sagen:

Ist der von der Flüssigkeit eingenommene Raum ein einfach zusammenhängender, und ist die Bewegung der Membranen mittelst der Functionen

$$(3.) \qquad \alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \ldots .$$

in bestimmter Weise gegeben, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit, auch ohne Kenntniss ihres Anfangszustandes, bereits vollständig bestimmt sein.

Die Bewegung der Flüssigkeit ist mithin *unabhängig* von ihrem Anfangszustand. Als Grund dieses sonderbaren Resultates kann man etwa anführen, dass durch die gegebene Bewegung der Membranen jener Anfangszustand der Flüssigkeit schon *mitbestimmt* ist, wie solches sich sofort ergiebt, falls man nur den Satz (3.) in Anwendung bringt auf die Zeit t_0 des Anfangszustandes.

Da übrigens die Bedingungen (I.), (I. a, b, c), wie schon bemerkt, nur die α, β, ... selber und deren erste Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ... enthalten, so können wir den Satz (3.) etwas genauer auch so ausdrücken:

Ist der von der Flüssigkeit eingenommene Raum einfach zusammenhängend, und sind für irgend einen Augenblick t die Werthe von

$$(4.) \qquad \alpha, \beta, \ldots \text{ und } \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots .$$

gegeben, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit für diesen Augenblick t bereits vollständig bestimmt sein.

Wir betrachten beispielsweise den Fall, dass die Membranen *unbeweglich*, mithin $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ... *Null* sind. Alsdann verschwindet die rechte Seite der Formel (I. c); so dass also in diesem Falle den Bedingungen (I.), (I, a, b, c) genügt wird durch

$$\Phi = h(t),$$

wo $h(t)$ eine unbestimmte Function der Zeit vorstellt. Hieraus folgt mittelst der Relationen $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, sofort

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Auch erkennt man aus den Sätzen (1.), (2.), dass diese Werthe von Φ, u, v, w nothwendiger Weise die *richtigen* sind; denn neben diesen Werthen können, zufolge jener Sätze, keine andern existiren, welche den gestellten Bedingungen (I.), (I. a, b, c) ebenfalls Genüge leisteten.

Ist also der von der Flüssigkeit eingenommene Raum ***einfach zusammenhängend***, *und sind die diesen Raum begrenzenden Membranen*

(5.) ***in Ruhe***,

so wird sich die Flüssigkeit selber nothwendiger Weise ebenfalls ***in Ruhe*** *befinden.*

Sind z. B. die Membranen in einer continuirlich fortschreitenden, aber *ab und zu erlöschenden* Bewegung begriffen, der Art, dass z. B. im Augenblick t_1 ein *Ruhezustand* der Membranen eintritt, ebenso etwa später im Augenblick t_2, ebenso später im Augenblick t_3, u. s. w., so wird in jedem solchen Augenblick auch die Flüssigkeit *in Ruhe* sein.

Es wird mithin die lebendige Kraft der Flüssigkeit in jedem solchen Augenblicke immer wieder zu *demselben* Werth (nämlich zum Werthe *Null*) zurückkehren.

Man könnte vielleicht vermuthen, dass einigermassen Analoges auch gelten werde für den Fall eines *nicht* einfach zusammenhängenden Raumes, dass etwa die lebendige Kraft der Flüssigkeit auch in diesem Fall in den Augenblicken t_1, t_2, t_3, etc. stets von Neuem zu *ein- und demselben* Werth (wenn auch nicht gerade zum Werthe Null) zurückkehren werde. Diese nicht unwichtige Frage soll später (in § 9) weiter behandelt werden.

Bemerkung. — Nach unserer (p. 15) ein für alle Mal gemachten Voraussetzung soll der *Anfangszustand* der betrachteten Flüssigkeit *wirbelfrei* sein. Und Gleiches gilt in Folge dessen, wie früher bewiesen wurde (p. 15) auch für alle *späteren Zustände* der Flüssigkeit.

Jene Voraussetzung ist selbstverständlich bei den Sätzen dieses § stets im Auge zu behalten. Mit grösserer Ausführlichkeit würden daher z. B. die Sätze (4.), (5.) so auszusprechen sein.

Ist der von der Flüssigkeit occupirte und von den gegebenenen Membranen begrenzte Raum ***einfach*** *zusammenhängend, und sind für irgend einen Augenblick die* ***Lagen*** *und* ***Geschwindigkeiten*** *jener Membranen gegeben, so wird hiedurch der augenblickliche Bewegungszustand der Flüssigkeit, falls er* ***wirbelfrei*** *sein soll, bereits vollständig und eindeutig bestimmt sein.* Sind insbesondere die Geschwindigkeiten der Membranen *Null*, so ist dieser eindeutig bestimmte Bewegungszustand der Flüssigkeit nichts Anderes als der *Zustand der Ruhe*. Mit andern Worten:

Ist die Flüssigkeit von ***festen Wänden*** *eingeschlossen, und der von ihr eingenommene Raum ein* ***einfach*** *zusammenhängender, so wird die Flüssigkeit, falls sie* ***wirbelfrei*** *bleiben soll,* ***gar keiner*** *Bewegung fähig, mithin zu* ***beständiger*** *Ruhe verurtheilt sein.*

§ 8.

Die charakteristischen Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials für den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Raumes.

Von welcher Beschaffenheit der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$ auch sein mag, stets wird sich derselbe durch irgend welche Querschnitte q, q', q'', ... in einen *einfach zusammenhängenden* Raum verwandeln lassen. Und das Geschwindigkeitspotential Φ wird alsdann, weil seine Ableitungen nach x, y, z in $\mathfrak{R}$ überall stetig sein sollen [vgl. (I. a) p. 19], im Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Querschnitte q, q', q'', ..., überall stetig, in jenen Querschnitten aber mit irgend welchen Werthdifferenzen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... behaftet sein, die unabhängig von x, y, z, also nur noch Functionen der Zeit sind. Dies ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen p. 24.

Sind nun, was z. B. den Querschnitt q betrifft, Φ_1, V_1, p_1 und Φ_2, V_2, p_2 die Werthe der Functionen Φ, V, p zu beiden Seiten dieser Fläche q, so muss nach (III. a) p. 19 auf der *einen* Seite von q die Gleichung stattfinden:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2\right] + V_1 + \frac{p_1}{\varrho} = H(t),$$

und auf der *andern* die analoge Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)^2\right] + V_2 + \frac{p_2}{\varrho} = H(t).$$

Subtrahirt man aber diese beiden Gleichungen von einander, und beachtet dabei, dass V im Raume $\mathfrak{R}$ *allenthalben stetig* ist, dass ferner Gleiches nach (I. a), (III. b) p. 19 auch von $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ und p gilt, und dass folglich die Relationen stattfinden:

$$V_1 = V_2, \quad p_1 = p_2$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z},$$

so erhält man:

$$\frac{\partial (\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial t} = 0,$$

also, weil die dem Querschnitt q zugehörige Differenz $\Phi_2 - \Phi_1$ mit $\varkappa$ bezeichnet worden ist,

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} = 0.$$

Folglich ist dieses $\varkappa$ nicht nur von x, y, z, *sondern auch von t* unabhängig, mithin *constant*. Gleiches gilt offenbar von $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... Diese

Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... werden also zur Zeit t genau dieselben Werthe haben wie z. B. zur Zeit des Anfangszustandes, also zu bezeichnen sein als gewisse, *jenem Anfangszustand eigenthümliche Constanten.*

Das Geschwindigkeitspotential Φ *besitzt also, falls der von der Flüssigkeit occupirte Raum* $\mathfrak{R}$ *durch irgend welche Querschnitte* q, q', q'', ... *in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt gedacht wird, im ganzen folgende Eigenschaften:*

(I.) Φ *selber ist im Raume* $\mathfrak{R}$, *mit Ausnahme der Querschnitte* q, q', q'', ..., *überall stetig, in diesen Querschnitten aber mit constanten Differenzen* $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... *behaftet, deren Werthe sich bestimmen durch den gegebenen Anfangszustand der Flüssigkeit;*

(I. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ *sind im Raume* $\mathfrak{R}$ *ohne Ausnahme überall stetig;*

(I. b.) $\Delta \Phi$ *ist im Raum* $\mathfrak{R}$ *überall* $= 0$;

(I. c) *an der Oberfläche des Raumes* $\mathfrak{R}$ *besitzt der Differentialquotient von* Φ *nach der Normale die vorgeschriebenen Werthe:*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \cdots;$$

wie sich solches sofort ergiebt mit Rücksicht auf die früher aufgestellten Formeln (p. 19).

Wir können hinzufügen: *Durch diese Bedingungen* (I.), (I. a, b, c) *ist das Geschwindigkeitspotential*

(1.) $$\Phi$$

vollständig bestimmt bis auf ein additives, nur noch von der Zeit abhängendes Glied.

Beweis. — Es seien Φ und Ψ *irgend zwei* den Bedingungen (I.), (I. a, b, c) entsprechende Functionen, und es werde gesetzt:

(α.) $$\Phi - \Psi = \Omega.$$

Sind nun Φ_1, Ψ_1, Ω_1 und Φ_2, Ψ_2, Ω_2 die Werthe der Functionen Φ, Ψ, Ω zu beiden Seiten des Querschnitts q, so ist nach (I.)

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varkappa,$$
$$\Psi_2 - \Psi_1 = \varkappa,$$

mithin

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 0.$$

D. h. Ω hat zu beiden Seiten der Fläche q einerlei Werth. Gleiches gilt offenbar für q', q'', ... Folglich ist

(β.) Ω im Raume $\mathfrak{R}$ *überall stetig.*

Ferner sind in Folge der Bedingungen (I. a, b, c)

(γ.) $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$ überall stetig,

(δ.) $\Delta\Omega$ im Raume $\mathfrak{R}$ überall $= 0$,

(ε.) und $\dfrac{\partial\Omega}{\partial N} = 0$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Aus diesen Eigenschaften (β.), (γ.), (δ.), (ε.) der Function Ω folgt aber sofort [vgl. die analogen Betrachtungen des auf p. 26 geführten Beweises], dass Ω unabhängig von x, y, z, mithin nur noch eine Function der Zeit ist. *Q. e. d.*

Wir können schliesslich den soeben bewiesenen Satz (1.) auch so aussprechen:

Durch die aufgestellten Bedingungen (I.), (I. a, b, c) *sind die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit:*

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{2.}$$

vollständig bestimmt.

Die Bedingungen (I.), (I. a, b, c) sind, ebenso wie früher, *abhängig von der gegebenen Bewegung der Membranen*, nämlich behaftet mit den diese Bewegung repräsentirenden Functionen $\alpha = \alpha\,(t)$, $\beta = \beta\,(t)$, ... Denn sowohl der Raum $\mathfrak{R}$ wie auch die rechte Seite der Formel (I. c) bestimmen sich durch die augenblicklichen Werthe von α, β, ... und von $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ...

Ausserdem aber sind im gegenwärtigen Fall die Bedingungen (I.), (I. a, b, c) auch noch *abhängig vom Anfangszustande der Flüssigkeit*, nämlich behaftet mit den diesem Zustand eigenthümlichen Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... Auch bemerkt man, dass ausser diesen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... keinerlei andere vom Anfangszustand abhängende Grössen in jenen Bedingungen enthalten sind. Somit gelangt man, auf Grund der Sätze (1.), (2.) zu folgendem Resultat:

Denkt man sich die Bewegung der Membranen mittelst der Functionen $\alpha = \alpha\,(t)$, $\beta = \beta\,(t)$, ... *gegeben, denkt man sich aber, an Stelle des Anfangszustandes der Flüssigkeit, nur die durch diesen Anfangszustand charakterisirten Constanten*

$$\varkappa, \varkappa', \varkappa'' \ldots, \tag{3.}$$

gegeben, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit bereits vollständig bestimmt sein.

Bemerkung. — Mag der Raum $\mathfrak{R}$ nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein, im einen wie im anderen Fall ergeben sich, wie in diesem und dem vorhergehenden § gezeigt ist, für Φ, u, v, w Werthe von der Form:

$$\Phi = g\ (x, y, z, t) + h\ (t), \tag{4.}$$

$$u = g_1\ (x, y, z, t), \tag{5.}$$

$$v = g_2\ (x, y, z, t), \tag{6.}$$

$$w = g_3\ (x, y, z, t), \tag{7.}$$

wo g, g_1, g_2, g_3 *völlig bestimmte* Functionen vorstellen, h hingegen eine *unbestimmte* Function bezeichnet. Substituirt man den Werth (4.) der Function Φ in die Formel (III. a) p. 19:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + V + \frac{p}{\varrho} = H\ (t),$$

so erhält man für p einen Ausdruck von der Form

$$p = g_p\ (x, y, z, t) + h_p(t), \tag{8.}$$

wo g_p wieder eine *völlig bestimmte* Function vorstellt, während

$$h_p(t) = \varrho\ H(t) - \varrho\ \frac{d\ h(t)}{dt}$$

eine ganz *unbestimmte* Function ist.

Dass im Werthe von p ein solches unbestimmtes Glied $h_p(t)$ sich einstellt, darf nicht befremden, war vielmehr auf Grund unserer früheren Betrachtungen (p. 20, oben) von vornherein zu erwarten.

Zweite Bemerkung. — Uebrigens ist dieses unbestimmte Glied $h_p(t)$ *ohne Einfluss* auf den Werth der zu berechnenden Arbeiten:

$$dL = L_1 d\alpha + L_2 d\beta + \ldots.$$

$$\delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \ldots.$$

Denn das L_1 z. B. drückt sich aus durch die Formel:

$$L_1 = \iint_{\mathfrak{R}} p\, \mathsf{A}\, d\sigma \qquad [\text{vgl. (17.) p. 11.}]$$

Substituirt man aber hier für p den Werth (8.), so folgt:

$$L_1 = \iint_{\mathfrak{R}} g_p\ (x, y, z, t)\, \mathsf{A}\, d\sigma + h_p(t) \iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{A}\, d\sigma,$$

wo das *zweite* Integral [nach (9.) p. 8] *verschwindet.* *Q. e. d.*

§ 9.

Einige Betrachtungen von ganz speciellem Charakter.

Der Zweck dieser Betrachtungen besteht in der Beantwortung der zu Ende des § 7 aufgeworfenen (und für unsere späteren Untersuchungen wichtigen) Frage.

Die Flüssigkeit sei im Ganzen nur begrenzt von einer einzigen Membran σ, und diese habe die Gestalt einer *ringförmigen Rotationsfläche von beliebiger Meridiancurve.* Bezeichnet man also die von der

Meridiancurve begrenzte ebene Fläche mit q, und ein Element dieser Fläche mit dq, ferner den senkrechten Abstand des Elementes dq von der geometrischen Axe der Rotationsfläche mit r, so hat der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$, oder vielmehr das Volumen dieses Raumes den Werth:

$$(f.)\qquad \mathfrak{R} = 2\pi \iint r\,dq,$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente dq jener Fläche q.

Betrachtet man die Fläche q als einen *Querschnitt* des Raumes $\mathfrak{R}$, so verwandelt sich derselbe hierdurch in einen *einfach zusammenhängenden* Raum; sodass also der ursprünglich gegebene Raum $\mathfrak{R}$ als *zweifach zusammenhängend* zu bezeichnen ist (vgl. die Definition p. 22).

Denkt man sich nun die Memhran σ von *starrer Form* und *unbeweglich aufgestellt,* und denkt man sich ausserdem den Anfangszustand der Flüssigkeit *gegeben*, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit für alle folgenden Zeiten *völlig bestimmt* sein. Genauer betrachtet, ist hierzu die vollständige Kenntniss des Anfangszustandes nicht einmal erforderlich, sondern nur die Kenntniss einer gewissen dem Anfangszustande zugehörigen Constanten. In der That können wir, weil der Raum $\mathfrak{R}$ durch einen einzigen Querschnitt q in einen einfach zusammenhängenden Raum sich verwandelt, auf Grund des Satzes (3.) p. 31 uns folgendermassen ausdrücken:

Befindet sich die Membran σ fortdauernd in Ruhe, und ist die durch den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirte, dem Querschnitt q entsprechende Constante $\varkappa$ gegeben, so wird hierdurch die Bewegung der Flüssigkeit für alle folgenden Zeiten bereits völlig bestimmt sein. Dabei ist hinzuzufügen, dass jene Constante $\varkappa$ die Werthdifferenz des Geschwindigkeitspotentials Φ in jenem Querschnitt q repräsentirt.

Um die so bestimmte Bewegung wirklich zu berechnen, bedienen wir uns der Formeln (I.), (I. a, b, c) p. 30, welche im gegenwärtigen Fall (wo die Membran σ starr und unbeweglich sein soll) die Gestalt annehmen:

(I.) Φ selber soll im Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme des Querschnitts q überall stetig, in diesem Querschnitt aber mit der constanten Differenz $\varkappa$ behaftet sein;

(I. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sollen *stetig* sein im Raume $\mathfrak{R}$;

(I. b) $\Delta\Phi$ soll $= 0$ sein im Raume $\mathfrak{R}$;

(I. c) $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$ soll $= 0$ sein an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen zAxe zusammenfällt mit der geometrischen Axe der Rotationsfläche σ, und dessen xzEbene den Querschnitt q enthält, und bezeichnen wir das *Azimuth*, unter welchem die durch den variablen Punct x, y, z gelegte Meridianebene gegen jene xzEbene geneigt ist, mit ϑ, so wird den Bedingungen (I. a, b, c) entsprochen durch die Formel:

$$(\alpha.) \qquad \Phi = A + B\vartheta,$$

wo A, B beliebige Functionen der Zeit sein können. In der That folgt aus (α.):

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= -\frac{B\sin\vartheta}{r} = -\frac{By}{r^2}, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} &= +\frac{2By}{r^3}\frac{x}{r}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= +\frac{B\cos\vartheta}{r} = +\frac{Bx}{r^2}, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} &= -\frac{2Bx}{r^3}\frac{y}{r}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den senkrechten Abstand des Punctes x, y, z von der zAxe bezeichnet. Hieraus folgt weiter:

$$(\gamma.) \qquad \Delta\Phi = 0.$$

Ferner hat Φ, zufolge (α.), in allen Puncten derselben Meridianebene *einerlei* Werth; und es ist also auf der Fläche σ:

$$(\delta.) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial N} = 0.$$

Die Formeln (β.), (γ.), (δ.) zeigen aber, dass den Bedingungen (I. a, b, c) wirklich genügt wird.

Setzt man nun ferner fest, das Azimuth ϑ solle nur von 0 bis 2π gezählt werden, so wird die durch die Formel (α.) repräsentirte Function Φ im Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme des in der xzEbene gelegenen Querschnittes q, überall *eindeutig und stetig*, in diesem Querschnitt q aber mit der Werthdifferenz $2\pi B$ behaftet sein. Diese Werthdifferenz soll aber nach (I.) den gegebenen constanten Werth $\varkappa$ besitzen. Somit folgt:

$$2\pi B = \varkappa, \quad \text{mithin } B = \frac{\varkappa}{2\pi},$$

und also nach (α.)

$$\Phi = A + \frac{\varkappa}{2\pi}\vartheta,$$

wo das A nach wie vor eine *unbestimmte Function der Zeit* vorstellt. Bezeichnet man diese Function etwa mit $h(t)$, so ist also:

$$(\varepsilon.) \qquad \Phi = \frac{\varkappa}{2\pi}\vartheta + h(t).$$

Zugleich erkennt man aus dem Satze (1.) p. 30, dass dieser Werth von Φ nothwendig der *richtige* ist. Denn neben diesem Werthe kann, zufolge jenes Satzes, kein anderer existiren, welcher ebenfalls den gestellten Anforderungen Genüge leistet. Die *gesuchte Bewegung der Flüssigkeit* ist also dargestellt durch die Formeln:

$$(\zeta.)\qquad \begin{aligned} u &= -\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{y}{r^2}, \\ v &= +\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{x}{r^2}, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die *Geschwindigkeit* V der Flüssigkeit im Puncte x, y, z den Werth hat:

$$(\eta.)\qquad V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{1}{r},$$

dass sie also umgekehrt proportional ist mit dem Abstande des Punctes x, y, z von der geometrischen Axe der Fläche σ, und dass sie senkrecht steht gegen die durch den Punct x, y, z gelegte Meridianebene.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die *lebendige Kraft* T der Flüssigkeit:

$$T = \frac{\varrho}{2}\int\!\!\int\!\!\int V^2 \cdot dq \cdot r d\vartheta = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\right)^2 \int\!\!\int\!\!\int \frac{dq\, d\vartheta}{r}$$

oder, falls man die Integration nach ϑ ausführt:

$$(\vartheta.)\qquad T = \frac{\varrho\varkappa^2}{4\pi}\int\!\!\int\frac{dq}{r},$$

wo alsdann gegenwärtig noch zu integriren ist über die Elemente dq des Querschnittes q.

Die gefundenen Formeln (ζ.), (η.), (ϑ.) zeigen, dass u, v, w, V, T unabhängig von der Zeit sind, dass also die Bewegung der Flüssigkeit zu allen Zeiten dieselbe bleibt, wie zur Zeit des Anfangszustandes, was übrigens von vornherein zu erwarten stand.

Weitere Betrachtung. — Die die Flüssigkeit umschliessende Membran σ mag nun in irgend welche *Bewegung* (d. i. in irgend welche Lagen- und Form-Veränderung) versetzt werden, jedoch der Art, dass sie beständig die Gestalt einer ringförmigen Rotationsfläche, und auch beständig *dasselbe* Volumen des Innenraumes bewahrt; sodass also z. B. das in (*f.*) p. 33 genannte Integral

$$(A.)\qquad \int\!\!\int r\,dq$$

fortdauernd *denselben* Werth behält.

Denken wir uns nun diese Bewegung der Membran σ in continuirlicher Weise fortschreitend und dabei *ab und zu erlöschend*, sodass

in gewissen, von einander getrennten Zeitaugenblicken t_1, t_2, t_3, ... jedesmal ein *Ruhezustand* der Membranen eintritt, — so wird die lebendige Kraft T der Flüssigkeit in jedem solchen Zeitaugenblick sich bestimmen mittelst der in (ϑ.) angegebenen Formel:

$$(B.) \qquad T = \frac{\varrho \varkappa^2}{4\pi} \iint \frac{dq}{r},$$

wo ϱ die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit, und $\varkappa$ ebenfalls eine *Constante* ist.

Obwohl nun aber das Integral (A.) in den Augenblicken t_1, t_2, t_3, ... stets *denselben* Werth hat, so kann trotzdem offenbar das Integral (B.) in diesen Augenblicken *sehr verschiedene* Werthe besitzen. Wir können dieses Resultat, welches ein negatives ist, sofort verallgemeinern, indem wir uns so ausdrücken:

Ist der Anfangszustand der von irgend welchen Membranen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, ... begrenzten Flüssigkeit in beliebiger Weise (aber selbstverständlich als ein wirbelfreier) *gegeben, und denkt man sich jene Membranen in einer continuirlich fortschreitenden, dabei aber ab und zu erlöschenden Bewegung begriffen, sodass also in irgend welchen von einander getrennten Zeitaugenblicken t_1, t_2, t_3, ... jedesmal ein Ruhezustand der Membranen eintritt, so wird die lebendige Kraft der Flüssigkeit im Allgemeinen in jenen Augenblicken t_1, t_2, t_3, ... nicht einerlei Werth, sondern verschiedene Werthe haben.*

Hiermit ist die zu Ende des vorhergehenden §, auf p. 28, aufgeworfene Frage beantwortet.

Anders gestalten sich übrigens die Dinge für den speciellen Fall, dass die Flüssigkeit zu Anfang sich in Ruhe befindet. Alsdann nämlich sind die durch diesen Anfangszustand charakterisirten Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... sämmtlich $= 0$. *Und hieraus folgt sofort, dass die Flüssigkeit in den Augenblicken t_1, t_2, t_3, ... jedesmal in Ruhe, mithin ihre lebendige Kraft in diesen Augenblicken jedesmal* $= 0$ *ist.*

§ 10.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Multiplicirt man die drei hydrodynamischen Differentialgleichungen (A.) p. 13:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{\partial}{\partial x}\left(V + \frac{p}{\varrho}\right)$$

etc. etc.

der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, und addirt, so folgt:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=-m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\cdots\right)-\frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\cdots\right).$$

Summirt man diese Formel über alle Theilchen m der betrachteten Flüssigkeit, so erhält man:

$$(1.)\qquad \frac{dT}{dt}=-\frac{dW}{dt}-\sum_{\mathfrak{R}}\frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\cdots\right),$$

wo T und W die Werthe haben:

$$(2.)\qquad T=\sum_{\mathfrak{R}}\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

$$(3.)\qquad W=\sum_{\mathfrak{R}} mV,$$

und wo also T und W die *lebendige Kraft* der Flüssigkeit und das auf sie ausgeübte *Gesammtpotential* vorstellen. (Vgl. p. 12).

Wir können nun die Formel (1.), indem wir $m=\varrho\, dx dy dz$ setzen, auch so schreiben:

$$\frac{d(T+W)}{dt}=-\iiint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial y}v+\frac{\partial p}{\partial z}w\right)dxdydz,$$

wo u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten vorstellen, mithin der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ Genüge leisten. Demgemäss können wir die Formel auch so darstellen:

$$\frac{d(T+W)}{dt}=-\iiint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right)dxdydz,$$

oder auch so:

$$\frac{d(T+W)}{dt}=-\iint_{\mathfrak{R}} p\left(u\cos(\mathsf{N},x)+v\cos(\mathsf{N},y)+w\cos(\mathsf{N},z)\right)d\sigma,$$

oder mit Rücksicht auf (η.) p. 17 auch so:

$$(4.)\quad d(T+W)=-\iint_{\mathfrak{R}} p\left(d\xi\cos(\mathsf{N},x)+d\eta\cos(\mathsf{N},y)+d\zeta\cos(\mathsf{N},z)\right)d\sigma,$$

oder endlich mit Rücksicht auf (16. a) p. 11 auch so:

$$(5.)\qquad d(T+W)=-dL.$$

In jedem Zeitelement dt der Bewegung wird mithin der Werth von $(T+W)$ um ebensoviel abnehmen, als die Arbeit dL beträgt, welche während dieses Zeitelementes von der Flüssigkeit auf die ihr anliegenden Membranen ausgeübt wird. Dabei ist übrigens zu bemerken, dass T speciell die lebendige Kraft der *Flüssigkeit* (exclusive der Membranen) vorstellt, und dass ebenso W speciell das auf die *Flüssigkeit* (exclusive der Membranen) ausgeübte Gesammtpotential bezeichnet. Die Mem-

branen stehen in unserer Vorstellung der Flüssigkeit als etwas *Fremdartiges, Aeusseres* gegenüber. Und jene Arbeit dL, welche die Flüssigkeit auf die Membranen ausübt, wird daher zu bezeichnen sein als eine von der Flüssigkeit *nach Aussen hin abgegebenene Arbeit.*

Nehmen wir der Einfachheit willen an, es sei $V = 0$, mithin auch $W = 0$. Alsdann erhalten wir aus (5.):

$$dT = -dL, \tag{6.}$$

oder, wenn wir über einen Zeitraum $t_1 \ldots t_2$ integriren:

$$T_2 - T_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dL. \tag{7.}$$

D. h. *die lebendige Kraft der Flüssigkeit nimmt innerhalb eines jeden Zeitraumes um ebensoviel ab, als die während dieses Zeitraumes von ihr nach Aussen hin abgegebene Arbeit beträgt.* Dieser Satz gilt für den ganzen Verlauf der von uns betrachteten Bewegung. Und diese Bewegung ist diejenige, welche sich bestimmt einerseits durch einen beliebig gegebenen (wirbelfreien) Anfangszustand der Flüssigkeit und andrerseits durch eine beliebige vorgeschriebene Bewegung der sie begrenzenden Membranen.

Nehmen wir nun an, der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$ sei *einfach zusammenhängend*, und jene vorgeschriebene Bewegung der Membranen sei eine continuirlich fortschreitende, dabei aber *ab und zu erlöschende,* sodass in irgend welchen, von einander getrennten Zeitaugenblicken t_1, t_2, t_3, etc. jedesmal ein *Ruhestand* der Membranen eintritt. Alsdann wird in diesen Augenblicken $t_1, t_2, t_3, \ldots$ die lebendige Kraft der Flüssigkeit jedesmal $= 0$ sein (Satz p. 28), mithin die *linke* Seite der Gleichung (7.), und folglich auch ihre *rechte* Seite verschwinden. Demgemäss ergiebt sich der Satz:

Ist der von der Flüssigkeit occupirte Raum einfach zusammenhängend, und $V = 0$; befinden sich ferner die die Flüssigkeit begrenzenden Membranen in irgend welcher stetigen, dabei aber ab und zu erlöschenden Bewegung, und tritt demgemäss etwa im Augenblicke t_1, und ebenso später im Augenblicke t_2 ein Ruhezustand der Membranen ein; so wird die während des Zeitraumes $t_1 \ldots . t_2$ von der Flüssigkeit nach Aussen hin abgegebene Arbeit stets $= 0$ sein.

Ist der von der Flüssigkeit occupirte Raum *nicht* einfach zusammenhängend, so ist dieser Satz (zufolge der Ergebnisse p. 36) im Allgemeinen *nicht* mehr richtig. Allerdings wird er auch in diesem Falle noch gelten, wenn man voraussetzt, die Flüssigkeit habe sich zu Anfang in *Ruhe* befunden.

§ 11.

Der analytische Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials.

Sind die Functionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ... gegeben, und sind ferner die durch den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirten Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ ebenfalls gegeben, so hat das Geschwindig-

keitspotential $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ im Ganzen folgenden Bedingungen zu entsprechen:

(a.)
- Φ selber soll in den Querschnitten $q, q', q'', \ldots$ mit den gegebenen constanten Differenzen $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ behaftet, sonst aber im Raume $\mathfrak{R}'$ stetig sein;
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sollen im Raume $\mathfrak{R}$ überall stetig, und $\Delta\Phi$ daselbst überall $= 0$ sein;
- $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}$ soll $= \mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$ sein, an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$.

Und durch diese Bedingungen ist zugleich das Geschwindigkeitspotential Φ *vollständig bestimmt*, bis auf ein additives, nur noch von der Zeit abhängendes Glied. — Dies sind die früher (p. 30) erhaltenen Ergebnisse.

Um nun dieses Φ wirklich zu berechnen, kann man folgenden Ansatz machen:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \frac{d\alpha}{dt} + \Phi_2 \frac{d\beta}{dt} + \Phi_3 \frac{d\gamma}{dt} + \Phi_4 \frac{d\delta}{dt} + \cdots \tag{A.}$$

In der That wird dieser Ausdruck den gestellten Anforderungen entsprechen, sobald man die $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \ldots$ als Functionen von x, y, z, t betrachtet, die folgenden Bedingungen genügen sollen:

(B_0.)
- Φ_0 soll in den Querschnitten $q, q', q'', \ldots$ mit den gegebenen constanten Werthdifferenzen $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ behaftet, hievon abgesehen aber im Raume $\mathfrak{R}$ stetig sein,
- $\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$ *stetig* und $\Delta\Phi_0 = 0$, im Raume $\mathfrak{R}$,
- $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathsf{N}} = 0$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Ferner was Φ_1 betrifft:

(B_1.)
- Φ_1 *stetig* im Raume $\mathfrak{R}$,
- $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$ *stetig* und $\Delta\Phi_1 = 0$, im Raume $\mathfrak{R}$,
- $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Sodann, was Φ_2 betrifft:

(B_2.)
- Φ_2 *stetig* im Raume $\mathfrak{R}$,
- $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}$ *stetig* und $\Delta\Phi_2 = 0$, im Raume $\mathfrak{R}$,
- $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{B}$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

U. s. w. U. s. w.

Dass derartige Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... *wirklich existiren*, geht daraus hervor, dass jede dieser Functionen eine bestimmte physikalische Bedeutung hat. In der That repräsentiren dieselben der Hauptsache nach gewisse Geschwindigkeitspotentiale, welche eintreten *würden*, falls man den gegebenen Anfangszustand der Flüssigkeit und die gegebene Bewegung der Membranen, d. i. die Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... und die Functionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, ... in geeigneter Weise abändern wollte.

So z. B. wird unser den Bedingungen (a.) p. 39 entsprechendes Geschwindigkeitspotential Φ in Φ_0 übergehen, wenn man $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... ungeändert lässt, hingegen die Functionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, ... in Constanten verwandelt.

Ferner wird jenes Φ in $\Phi_1 \frac{d\alpha}{dt}$ übergehen, wenn man $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ alle $= 0$ setzt, $\alpha(t)$ ungeändert lässt, hingegen $\beta(t)$, $\gamma(t)$, ... in Constanten verwandelt.

U. s. w. U. s. w.

Auch ergiebt sich aus dem zu Anfang dieses § ausgesprochenen Satze, dass die Function Φ_0 durch die Bedingungen (B_0.), ebenso Φ_1 durch (B_1.), Φ_2 durch (B_2.), u. s. w. vollständig bestimmt sind, jedesmal abgesehen von einem additiven nur noch von der Zeit abhängenden Gliede. Diese additiven Glieder sind für unsere Theorie völlig indifferent, und mögen daher künftig ganz fortgelassen werden.

Eigenschaften der Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, etc. — Jede solche Function Φ_j ist abhängig von x, y, z, t:

$$\Phi_j = \Phi_j(x, y, z, t), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

wobei indessen das Auftreten des Argumentes t sich etwas genauer angeben lässt. Die die Functionen Φ_j völlig bestimmenden Bedingungen (B_j.) zeigen, dass diese Functionen in einem gegebenen Zeitaugenblick t nur abhängig sind von der augenblicklichen Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$, und der augenblicklichen Beschaffenheit der Functionen A, B, ... Mit andern Worten: Sie zeigen, dass die Φ_j in einem gegebenen Zeitaugenblick t völlig bestimmt sein werden, falls man nur bekannt ist mit den augenblicklichen Werthen der Parameter α, β, ... (Denn die Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$ und die Beschaffenheit der Functionen A, B, ... hängt lediglich ab von den Werthen dieser Parameter). Demgemäss ist zu schreiben:

$$\text{(C.)} \qquad \Phi_j = \Phi_j(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

und die Zeit t ist also in diesem Ausdruck nur insofern enthalten, als sie Argument der α, β, ... ist.

Die Functionen Φ_j sind im Raume $\mathfrak{R}$ überall stetig, mit Ausnahme

von Φ_0, welches in den Querschnitten $q, q', q'', \ldots$ mit den constanten Werthdifferenzen $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ behaftet ist. Aus der *Constanz* dieser Differenzen aber ergiebt sich, dass wenigstens die Ableitungen

(D.) $$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}, \ldots$$

und ebenso auch die Ableitung nach der Zeit

(E.) $$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots$$

im Raume $\mathfrak{R}$ *überall stetig* sind. Um Weiteres über die Φ_j hinzuzufügen, erscheint es zweckmässig, zunächst an einige Green'sche Sätze zu erinnern.

Sind F und G Functionen von x, y, z, die innerhalb eines beliebig gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$ den Bedingungen entsprechen:

(α.) $$F, \ \frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y}, \ \frac{\partial F}{\partial z} \ \textit{stetig}, \quad \Delta F = 0,$$
$$G, \ \frac{\partial G}{\partial x}, \ \frac{\partial G}{\partial y}, \ \frac{\partial G}{\partial z} \ \textit{stetig}, \quad \Delta G = 0,$$

und setzt man zur Abkürzung

(β.) $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} = (F, G),$$

so gilt die Formel:

(γ.) $$\iiint_{\mathfrak{R}} (F, G)\, dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} F \frac{\partial G}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma,$$

mithin auch die parallel stehende Formel:

(γ'.) $$\iiint_{\mathfrak{R}} (F, G)\, dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} G \frac{\partial F}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma,$$

und folglich auch die aus diesen beiden durch Subtraction sich ergebende Formel:

(δ.) $$0 = \iint_{\mathfrak{R}} \left(F \frac{\partial G}{\partial \mathsf{N}} - G \frac{\partial F}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma.$$

In all diesen Formeln sind die Integrationen links und rechts ausgedehnt zu denken über alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ resp. über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes $\mathfrak{R}$. Dabei bezeichnet N die auf $d\sigma$ errichtete, dem Raume $\mathfrak{R}$ abgewendete Normale.

Beweis. Nach (β.) ist:

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z},$$

also mit Rücksicht auf die in (α.) gemachte Voraussetzung $\Delta G = 0$:

$$(F, G) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F \frac{\partial G}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F \frac{\partial G}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(F \frac{\partial G}{\partial z}\right).$$

Hieraus folgt mit abermaliger Rücksicht auf die Voraussetzungen (α.):

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (F, G)\, dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} F \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial G}{\partial y} \cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial G}{\partial z} \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma,$$

d. i.

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (F, G)\, dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} F \frac{\partial G}{\partial \mathsf{N}} d\sigma.$$

Hiermit aber ist die Formel (γ.), mithin auch (γ'.) und (δ.) bewiesen.

Verallgemeinerung. — Von besonderer Wichtigkeit ist, dass die Formel (γ.) unter Umständen auch noch richtig bleibt, wenn daselbst die stetige Function G durch eine *unstetige* Function U ersetzt wird. Es gilt nämlich folgender Satz:

Sind F und U Functionen von x, y, z, die im Raume $\mathfrak{R}$ den Bedingungen entsprechen:

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{aligned} &F,\ \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\ \textit{stetig},\quad \Delta F = 0,\\ &\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\ \textit{stetig},\quad \Delta U = 0, \end{aligned}$$

so wird, einerlei, ob U selber in $\mathfrak{R}$ stetig oder unstetig ist, stets die Formel stattfinden:

$$(\zeta.)\qquad \iiint_{\mathfrak{R}} (F, U)\, dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} F \frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}} d\sigma.$$

Beweis. — Ebenso wie vorhin, findet man:

$$(F, U) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(F \frac{\partial U}{\partial z}\right);$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die in (ε.) gemachten Voraussetzungen:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (F, U)\, dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} F \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma,$$

$$\text{d. i.}\qquad = \iint_{\mathfrak{R}} F \frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}} d\sigma. \qquad \textit{Q. e. d.}$$

Die in (α.) an F, G gestellten Anforderungen werden z. B. erfüllt durch die Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, ..., *nicht* durch Φ_0, wohl aber durch $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \gamma}$, ...; wie solches aus (B_0.), (B_1.), (B_2.), etc. sofort sich ergiebt. Man kann somit die Formel (δ.) z. B. anwenden auf

$$F = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad G = \Phi_j,\ (j = 1, 2, 3, 4, \ldots);$$

und erhält alsdann:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}} - \Phi_j \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha \partial \mathsf{N}}\right) d\sigma = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Nach (B_0.) ist aber $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathsf{N}} = 0$, mithin $\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha \partial \mathsf{N}}$ ebenfalls $= 0$. Somit folgt:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}} d\sigma = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Die beiden lezten Zeilen sind indessen mit einem (nicht leicht entdeckbaren) *Fehler* behaftet. Dieser besteht darin, dass aus der Formel $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} = 0$ noch *keineswegs* gefolgert werden darf, dass $\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\right)$ ebenfalls $= 0$ sein müsse.

In der That wird die Formel

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} = 0,$$

in mehr ausführlicher Weise geschrieben, folgendermassen lauten:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} U + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} V + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} W = 0,$$

falls man nämlich die Richtungscosinus der Normale N zur augenblicklichen Abkürzung mit U, V, W bezeichnet. Diese Formel ist nun offenbar gültig für jedweden Oberflächenpunct des Raumes $\mathfrak{R}$, und ebenso auch gültig für beliebige Werthe der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Sie kann somit also z. B. nach α differenzirt werden. Alsdann aber ergibt sich

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial \alpha} U + \cdots\right] + \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \cdots\right] = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\right) + \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right] = 0,$$

wo der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck im Allgemeinen *keineswegs* verschwindet. *Q. e. d.*

Jedenfalls sind die in (ε.) an F, U gestellten Anforderungen erfüllt, wenn man setzt:

$$F = \Phi_j, \ (j = 1, 2, 3, \ldots), \quad \text{und} \quad U = \Phi_0,$$

wie sich solches aus (B_0.), (B_1.), (B_2.), etc. sofort ergiebt. Somit folgt aus (ζ.):

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_j, \Phi_0)\, dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_j \frac{\partial \Phi_0}{\partial N} d\sigma, \quad \text{wo } j = 1, 2, 3, \ldots,$$

oder weil, nach (B_0.), $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} = 0$ ist:

$$\text{(G.)} \qquad \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_j, \Phi_0)\, dx dy dz = 0, \quad \text{wo } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Ferner sind jene in (ε.) an F, U gestellten Anforderungen offenbar auch dann erfüllt, wenn man setzt:

$$F = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad U = \Phi_0.$$

Somit folgt aus (ζ.):

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \Phi_0\right) dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} d\sigma.$$

Hieraus aber ergiebt sich, weil nach $(B_0.)$ das $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} = 0$ ist, die erste Formel des folgenden Systems:

$$(H.) \qquad \begin{aligned} &\iiint_{\Re} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \Phi_0\right) dx dy dz = 0, \\ &\iiint_{\Re} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}, \Phi_0\right) dx dy dz = 0, \\ &\iiint_{\Re} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \gamma}, \Phi_0\right) dx dy dz = 0, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

dessen übrige Formeln sich in analoger Weise herleiten lassen. Von diesen Formelsystemen (G.) und (H.) wird weiterhin Gebrauch zu machen sein.

§. 12.

Der analytische Ausdruck für die lebendige Kraft der Flüssigkeit.

Die lebendige Kraft der Flüssigkeit:

$$(1.) \qquad T = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\Re} m\,(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\varrho}{2} \displaystyle\iiint_{\Re} (u^2 + v^2 + w^2)\, dx dy dz$$

lässt sich, weil $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ ist, mit Rücksicht auf die in $(\beta.)$ p. 41 eingeführte Abkürzung auch so schreiben:

$$(2.) \qquad T = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\Re} (\Phi, \Phi)\, dx dy dz.$$

Nun ist aber nach (A.) p. 39:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \frac{d\alpha}{dt} + \Phi_2 \frac{d\beta}{dt} + \Phi_3 \frac{d\gamma}{dt} + \cdots,$$

mithin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots \end{aligned}$$

Erhebt man diese Formeln zum Quadrat, und addirt, so ergiebt sich mit abermaliger Benutzung der Abbreviatur $(\beta.)$ p. 41:

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi) = (\Phi_0, \Phi_0) &+ 2\,(\Phi_0, \Phi_1)\frac{d\alpha}{dt} + 2\,(\Phi_0, \Phi_2)\frac{d\beta}{dt} + \cdots \\ &+ (\Phi_1, \Phi_1)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\,(\Phi_1, \Phi_2)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \cdots \end{aligned}$$

Substituirt man aber diesen Werth von (Φ, Φ) in (2.), und beachtet man dabei die aus (G.) p. 43 entspringenden Formeln:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_1)\, dx dy dz = 0,$$

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_2)\, dx dy dz = 0,$$

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_3)\, dx dy dz = 0,$$

etc. etc.

so ergiebt sich ein Ausdruck von der Form:

$$(3.) \qquad T = \Theta_0 + \left[\Theta_{11} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\,\Theta_{12} \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \cdots\right],$$

nämlich ein Ausdruck, der, abgesehen vom Gliede Θ_0, eine homogene Function zweiten Grades von $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \ldots$ ist. Und zwar ergeben sich für die Coefficienten Θ die Werthe:

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_0)\, dx dy dz,$$

$$(4.) \qquad \Theta_{11} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_1, \Phi_1)\, dx dy dz,$$

$$\Theta_{12} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_1, \Phi_2)\, dx dy dz,$$

etc. etc.

Nach (C.) p. 40 sind *sämmtliche* Φ von der Form:

$$(5.) \qquad \Phi_j = \Phi_j(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Demgemäss werden also, wie aus (4.) ersichtlich ist, die Coefficienten Θ sämmtlich von der Form sein:

$$(6.) \qquad \Theta = \Theta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

d. h. *die Zeit t wird in den Φ_j und ebenso in den Θ nur insofern vorkommen, als sie Argument der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ist.*

Man könnte vielleicht vermuthen, dass der *erste* Coefficient Θ_0 von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ unabhängig, also eine *Constante* sei.

Nun repräsentirt Θ_0 zufolge (3.) denjenigen Werth, welchen T einnimmt, sobald die Membranen in irgend einem Augenblick ihre Bewegung verlieren und *zur Ruhe* kommen. Denkt man sich aber, jene Bewegung der Membranen durch passende Wahl der Functionen $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \ldots$ so eingerichtet, dass die Membranen z. B. im Augenblicke t_1 zur *Ruhe* gelangen, sodann später in irgend einem Augenblicke t_2 von Neuem zur *Ruhe* gelangen, so wird (wie früher p. 36 constatirt wurde) die lebendige Kraft T der Flüssigkeit in diesen Augenblicken t_1 und t_2 im Allgemeinen *verschiedene* Werthe haben.

Bezeichnet man also die Werthe der Parameter in jenen Zeitaugenblicken resp. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ so werden

$$\Theta_0(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots) \quad \text{und} \quad \Theta_0(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$$

im Allgemeinen *von einander verschieden* sein.

Wir gelangen somit zu der Einsicht, *dass der Coefficient*

$$\Theta_0 = \Theta_0(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \tag{7.}$$

im Allgemeinen keine Constante, sondern eine wirkliche Function von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *ist.* Gleiches ergiebt sich übrigens auch aus den auf p. 4 erwähnten *Kirchhoff*'schen Untersuchungen.

Beiläufige Bemerkung. — Nach (4.) ist

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_0)\, dx\,dy\,dz. \tag{8.}$$

Hieraus folgt nach (γ.) p. 41 sofort:

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \iint_{\mathfrak{S}} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial N}\, d\sigma, \tag{9.}$$

die Integration ausgedehnt über die Oberfläche desjenigen einfach zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{S}$, in welchen sich $\mathfrak{R}$ verwandelt mittelst der Querschnitte $q, q', q'', \ldots$

Die Function Φ_0 ist im Querschnitt q mit der constanten Differenz $\varkappa$ behaftet [vgl. (B_0.), p. 39]; ihre Werthe zu beiden Seiten von q sind also von der Form Φ_0 und $\Phi_0 + \varkappa$. Und der Bequemlichkeit willen mag die Seite mit dem Werthe Φ_0 die *linke*, diejenige mit dem Werthe $\Phi_0 + \varkappa$ die *rechte* Seite genannt werden. Ferner sei N die auf der *linken* Seite errichtete Normale der Fläche q. Alsdann hat derjenige Theil des Integrales (9.), welcher den beiden Seiten von q zugehört, die Gestalt:

$$\frac{\varrho}{2} \iint_q \left((\Phi_0 + \varkappa) \frac{\partial (\Phi_0 + \varkappa)}{\partial N} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial N} \right) d\sigma, \text{*)}$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $d\sigma$ der Fläche q. Die Differentialquotienten $\frac{\partial (\Phi_0 + \varkappa)}{\partial N}$ und $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N}$ sind aber *gleichwerthig*. Der in Rede stehende Integraltheil reducirt sich also auf:

$$\frac{\varrho}{2} \cdot \varkappa \iint_q \frac{\partial \Phi_0}{\partial N}\, d\sigma.$$

Analoges gilt für $q', q'', \ldots$; und man erhält also aus (9.):

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \left\{ \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial N}\, d\sigma + \sum \varkappa \iint_q \frac{\partial \Phi_0}{\partial N}\, d\sigma \right\}, \tag{10.}$$

wo das Sigma eine Summe von ebenso vielen Gliedern andeutet, als Querschnitte $q, q', q'', \ldots$ vorhanden sind.

---

*) Es ist hiebei zu beachten, dass N stets die *äussere* Normale sein soll, also z. B. in (9.) die *äussere* Normale des Raumes $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Nun ist nach (B_0.) p. 39 das $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N}$ an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ überall $= 0$. Somit verschwindet in (10.) das *erste* Integral. Man erhält also:

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \sum \varkappa \iint_q \frac{\partial \Phi_0}{\partial N} d\sigma, \tag{11.}$$

d. i.

$$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \sum \varkappa M = \frac{\varrho}{2} (\varkappa M + \varkappa' M' + \varkappa'' M'' + ..), \tag{12.}$$

wo alsdann z. B.

$$M = \iint_q \frac{\partial \Phi_0}{\partial N} d\sigma \tag{13.}$$

diejenige Flüssigkeitsmasse repräsentirt, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt q von der rechten zur linken Seite hindurchfliesst.

Sind also M, M', M'', ... die während der Zeiteinheit resp. durch die Querschnitte q, q', q'', ... fliessenden Flüssigkeitsmengen, so wird die Summe

$$\varkappa M + \varkappa' M' + \varkappa'' M'' + \cdots \tag{14.}$$

keineswegs eine Constante sein, sondern im Laufe der betrachteten Bewegung andere und andere Werthe annehmen; wie solches aus der Formel (12.) und dem Satze (7.) sofort sich ergiebt.

§ 13.

Die dem Hamilton'schen Princip entsprechenden Formeln.

Die Bewegung der betrachteten Flüssigkeit entspricht den drei Differentialgleichungen (A.) p. 13:

$$m x'' = - m \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{m}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1.}$$

etc. etc.

wo die Differentialquotienten nach der Zeit durch Accente angedeutet sind. Versteht man nun unter δx, δy, δz irgend welche der Incompressibilitäts-Bedingung

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{2.}$$

entsprechende virtuellen Verrückungen der Theilchen $m\,(x, y, z)$, so ergiebt sich aus (1.) durch Multiplication mit δx, δy, δz und Addition:

$$m\,(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = - m \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) - \frac{m}{\varrho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right), \tag{3.}$$

oder falls man über alle Theilchen m der Flüssigkeit, d. i. über alle Theilchen m des Raumes $\mathfrak{R}$ summirt:

$$\sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'' \delta x + \cdots) = - \sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \cdots \right) - \sum_{\mathfrak{R}} \frac{m}{\varrho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \cdots \right). \tag{4.}$$

Die *linke* Seite dieser Formel kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'\delta x + \cdots)\right) - \sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'\delta x' + \cdots),$$

also auch so:

$$(\lambda.)\qquad \frac{d}{dt}\left(\sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'\delta x + \cdots)\right) - \delta T,$$

wo $T = \sum_{\mathfrak{R}} \frac{m}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ die *lebendige Kraft* der Flüssigkeit vorstellt.

Bezeichnet man ferner das auf die Flüssigkeit von den äusseren Kräften ausgeübte *Gesammtpotential* mit $W = \sum_{\mathfrak{R}} m V$, so kann die *rechte* Seite der Formel (4.) so geschrieben werden:

$$-\delta W - \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right) dx\,dy\,dz,$$

also mit Rücksicht auf (2.) auch so:

$$-\delta W - \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\,(p\,\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(p\,\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial\,(p\,\delta z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

oder auch so:

$$(\varrho.)\qquad -\delta W - \iint_{\mathfrak{R}} p\,\big(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \delta y \cos(\mathsf{N}, y) + \delta z \cos(\mathsf{N}, z)\big)\,d\sigma.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke (λ.) und (ϱ.) in (4.) folgt nun:

$$(5.)\qquad \frac{d}{dt}\sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'\delta x + \cdots) = \delta\,(T - W) - \iint_{\mathfrak{R}} p\,\big(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \cdots\big)\,d\sigma.$$

Genaueres über die virtuellen Verrückungen. — Innerhalb des durch (2.) gegebenen Spielraums können die virtuellen Verrückungen δx, δy, δz *ad libitum* gewählt, resp. weiter eingeengt, *specieller* bestimmt werden. Eine solche *speciellere* Wahl wollen wir nun in der That treffen, in folgender Weise:

Wir betrachten, neben der w i r k l i c h stattfindenden Bewegung des gegebenen Systems, gleichzeitig eine gewisse f i n g i r t e Bewegung desselben (welche unter etwas abgeänderten Umständen eintreten würde), *und nehmen für jene virtuellen Verrückungen δx, δy, δz eines Theilchens m die Differenzen derjenigen Coordinaten, welche dieses Theilchen m zur Zeit t einerseits bei der w i r k l i c h e n, und andererseits bei der f i n g i r t e n Bewegung besitzt.*

Die *wirkliche* Bewegung des gegebenen Systems ist, wie wir wissen (vergl. Satz (3.) p. 31), mittelst der Formeln unserer Theorie vollständig bestimmt, sobald gegeben sind: *erstens* die Bewegung der Membranen, d. i. die Beschaffenheit der Functionen:

$$(6.\ a)\qquad \alpha = \alpha\,(t),\quad \beta = \beta\,(t),\ \ldots\ldots,$$

und *zweitens* die durch den Anfangszustand des Systems charakterisirten Constanten:

(6. b) $$\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots.$$

Die daneben zu betrachtende *fingirte* Bewegung mag nun von *genau demselben Anfangszustande* ausgehen, also mit *denselben* Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ behaftet sein. Ueberhaupt mag sie in genau derselben Weise, wie die wirkliche Bewegung, bestimmt sein, nur mit dem *einen* Unterschiede, dass an Stelle der Functionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t), \ldots$ etwas andere Functionen

$$\alpha^* = \alpha^*(t), \quad \beta^* = \beta^*(t), \ldots.$$

eintreten sollen. Uebrigens mögen diese neuen Functionen $\alpha^*, \beta^*, \ldots$ so gewählt werden, dass sie von den ursprünglichen Functionen $\alpha, \beta, \ldots$ nur *unendlich wenig* abweichen, und mit jenen sogar *identisch* sind sowohl zur Zeit t_0, d. i. zur Zeit des *Anfangszustandes*, wie auch in einem *bestimmten spätern* Zeitaugenblick t_1, der nach Belieben gewählt sein mag. Setzt man also:

$$\alpha^*(t) - \alpha(t) = \delta\alpha(t), \quad \beta^*(t) - \beta(t) = \delta\beta(t), \ldots.$$

oder einfacher geschrieben:

(7.) $$\alpha^* - \alpha = \delta\alpha, \quad \beta^* - \beta = \delta\beta, \ldots.$$

so sollen $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots.$ sowohl verschwinden zur Zeit t_0, wie auch zur Zeit t_1.

Der Bezeichnungsweise $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots$ entsprechend, mögen nun die Coordinaten irgend eines Membrantheilchens μ und irgend eines Flüssigkeitstheilchens m im Augenblicke t bei der *wirklichen* Bewegung mit

(8.) $$\xi, \eta, \zeta \quad \text{und} \quad x, y, z,$$

andererseits bei jener *fingirten* Bewegung mit

(9.) $$\xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta, \zeta + \delta\zeta \quad \text{und} \quad x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$$

benannt werden.

Da beide Bewegungen von *ein- und demselben* Anfangszustande ausgehen sollen, so sind die

(10.) $$\delta\alpha, \delta\beta, \ldots. \delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta, \delta x, \delta y, \delta z$$

zur Zeit jenes Anfangszustandes, d. i. zur Zeit t_0 *sämmtlich* $= 0$.

Da ferner $\alpha^*, \beta^*, \ldots.$ auch im Augenblicke t_1 mit $\alpha, \beta, \ldots.$ identisch sein sollen, mithin die Lage und Gestalt der Membranen zur Zeit t_1 bei der *fingirten* Bewegung genau dieselbe ist, wie bei der *wirklichen*, so sind die Grössen

(11.) $$\delta\alpha, \delta\beta, \ldots. \delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$$

im Augenblicke t_1 ebenfalls *sämmtlich* $= 0$ (nicht aber $\delta x, \delta y, \delta z$).

Allerdings könnte man zu glauben versucht sein, dass die δx, δy, δz zur Zeit t_1 ebenfalls $= 0$ seien. Doch ist dies nicht beweisbar, und wohl auch nicht richtig. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Die Flüssigkeit sei eingeschlossen in eine fest aufgestellte Kugelschaale, und innerhalb der Flüssigkeit sei ein starrer Körper nach Belieben beweglich. Zur Zeit t_0 befinde sich Alles in Ruhe. Wir führen nun den Körper aus seiner Anfangsposition A_0 auf irgend welchem Wege fort, und lassen ihn schliesslich zur Zeit t_1 in einer gewissen neuen Position A_1 wieder zur Ruhe kommen. Bei dieser Fortführung des Körpers werden im Allgemeinen sämmtliche Flüssigkeitstheilchen sich mit bewegen, und bestimmte Bahnen durchlaufen. Wir denken uns irgend ein *specielles* Flüssigkeitstheilchen m wirklich beobachtet. Seine Anfangsposition zur Zeit t_0 sei m_0, und seine Endposition zur Zeit t_1 mag bezeichnet werden mit m_1.

Hätten wir nun aber den Körper aus seiner Anfangsposition A_0 während des gegebenen Zeitraumes $t_1 - t_0$ auf einem *etwas anderen* Wege in jene Endposition A_1 gebracht, so würde möglicherweise jenes Theilchen m, dessen Anfangsposition m_0 ist, zur Zeit t_1 in eine Endposition gelangt sein, welche von m_1 *verschieden* ist.

Die wirkliche und die fingirte Bewegung sollen denselben allgemeinen Gesetzen z. B. der Incompressibilitäts-Bedingung entsprechen. Demgemäss wird also der Raum von den Theilchen m bei den Positionen x, y, z mit derselben constanten Dichtigkeit ϱ erfüllt sein, wie bei den Positionen $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Folglich ist

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0, \tag{12.}$$

wie verlangt worden war.

Da ferner beide Bewegungen denselben allgemeinen Gesetzen entsprechen, und überdiess auch von genau demselben Anfangszustande ausgehen, so werden diejenigen Theilchen m, welche zu Anfang mit den Membranen in Berührung sind, fortdauernd mit denselben in Berührung bleiben, sowohl bei der wirklichen, wie auch bei der fingirten Bewegung.

Ist nun σ_j irgend eine specielle unter den gegebenen Membranen, ferner μ ein bestimmtes Molecül derselben, endlich m irgend ein längs dieser Membran fortgleitendes Flüssigkeitstheilchen, und bezeichnet man die Positionen, welche σ_j, μ, m im Augenblicke t bei der *wirklichen* Bewegung besitzen, respective mit

$$(\alpha.) \qquad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \varpi) = 0,$$

$$(\alpha'.) \qquad \xi, \eta, \zeta,$$

$$(\alpha''.) \qquad x, y, z,$$

andererseits aber diejenigen Positionen, welche σ_j, μ, m in *eben demselben* Augenblick t bei der *fingirten* Bewegung haben würden, respective mit

(β.) $\qquad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \varpi + \delta\varpi) = 0,$*)

(β'.) $\qquad \xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta,\ \zeta + \delta\zeta,$

(β''.) $\qquad x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z,$

so werden offenbar die Werthe (α'.), (α''.) der Gleichung (α.), und die Werthe (β.'), (β''.) der Gleichung (β.) Genüge leisten; was im Ganzen vier Formeln ergiebt. Denkt man sich aber das Theilchen m so ausgewählt, dass es bei seiner *wirklichen* Bewegung im Augenblick t mit μ gerade in *Contact* ist, also der Art ausgewählt, dass x, y, z mit ξ, η, ζ *identisch* sind, so reduciren sich die in Rede stehenden vier Formeln auf folgende drei Formeln:

$$f(\xi, \eta, \zeta, \varpi) = 0,$$
$$f(\xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta, \zeta + \delta\zeta, \varpi + \delta\varpi) = 0,$$
$$f(\xi + \delta x, \eta + \delta y, \zeta + \delta z, \varpi + \delta\varpi) = 0.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\delta\zeta + \frac{\partial f}{\partial \varpi}\delta\varpi = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \xi}\delta x + \frac{\partial f}{\partial \eta}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\delta z + \frac{\partial f}{\partial \varpi}\delta\varpi = 0, \end{aligned}\right\} \text{ wo } f = f(\xi, \eta, \zeta, \varpi):$$

und hieraus durch nochmalige Subtraction:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\delta x - \delta\xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\delta y - \delta\eta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\delta z - \delta\zeta) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

(13.) $(\delta x - \delta\xi)\cos(\mathsf{N},x) + (\delta y - \delta\eta)\cos(\mathsf{N},y) + (\delta z - \delta\zeta)\cos(\mathsf{N},z) = 0,$

wo N die Normale der Membran an der betreffenden Stelle bezeichnet.

Die zu berechnende virtuelle Arbeit δL [vgl. (15. a. b. c.) p. 10] drückte sich aus nach Belieben entweder durch die Formel:

(14. a) $\quad \delta L = \iint_{\mathfrak{R}} p\,\big(\delta\xi\cos(\mathsf{N},x) + \delta\eta\cos(\mathsf{N},y) + \delta\zeta\cos(\mathsf{N},z)\big)\,d\sigma,$

oder auch durch die Formel:

(14. b) $\qquad \delta L = L_1\delta\alpha + L_2\delta\beta + \cdots$

wo L_1, L_2, $\cdots$ die Werthe haben:

$$L_1 = \iint_{\mathfrak{R}} p\mathsf{A}\,d\sigma, \qquad L_2 = \iint_{\mathfrak{R}} p\mathsf{B}\,d\sigma, \qquad \text{etc. etc.}$$

Und hierbei ist zu bemerken, dass der Ausdruck (14. a) gegenwärtig, auf Grund der Formel (13.), auch so geschrieben werden kann:

(14. c) $\quad \delta L = \iint_{\mathfrak{R}} p\,\big(\delta x\cos(\mathsf{N},x) + \delta y\cos(\mathsf{N},y) + \delta z\cos(\mathsf{N},z)\big)\,d\sigma.$

*) Man kann sich nämlich die Gleichung der Fläche σ_j mit einem Parameter behaftet denken, welcher $= \varpi$ ist bei der *wirklichen*, hingegen $= \varpi + \delta\varpi$ bei der *fingirten* Bewegung.

Fortsetzung der eigentlichen Untersuchung. — Die aus den drei hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitete Formel (5.) kann jetzt, unter Anwendung der soeben determinirten virtuellen Verrückungen und mit Rücksicht namentlich auf (14. c), auch so geschrieben werden:

$$(15.)\quad \delta(T-W)-\delta L=\frac{d\Omega}{dt},\ \text{wo}\ \Omega=\sum_{\mathfrak{R}} m\,(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z).$$

Das *Gesammtpotential* $W=\sum_{\mathfrak{R}} m V=\varrho\iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz$ ist offenbar nur abhängig von der augenblicklichen Lage und Gestalt des Raumes $\mathfrak{R}$, also nur abhängig von den augenblicklichen Werthen der Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ Also:

$$W=W(\alpha, \beta, \ldots)$$

Andererseits ist die *lebendige Kraft* T [vgl. (3.), (4.), (6.) p. 45] abhängig nicht nur von $\alpha, \beta, \ldots$, sondern auch von $\alpha', \beta', \ldots$ Also

$$T=T(\alpha, \beta, \ldots \alpha', \beta', \ldots).$$

Somit folgt:

$$(\text{f.})\quad \delta W=\frac{\partial W}{\partial \alpha}\delta\alpha+\frac{\partial W}{\partial \beta}\delta\beta+\ldots$$

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial \alpha}\delta\alpha+\frac{\partial T}{\partial \beta}\delta\beta+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha'+\frac{\partial T}{\partial \beta'}\delta\beta'+\cdots$$

oder weil z. B. $\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha'=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha\right)-\delta\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'}$ ist:

$$(\text{g.})\quad \delta T=\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\right)\delta\alpha+\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \beta'}\right)\delta\beta+\cdots\right\}$$
$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha+\frac{\partial T}{\partial \beta'}\delta\beta+\cdots\right).$$

Ausserdem ist nach (14. b):

$$(\text{h.})\quad \delta L=L_1\delta\alpha+L_2\delta\beta+\cdots$$

Durch Substitution dieser Werthe (f.), (g.), (h.) in (15.) folgt:

$$(16.)\left(\frac{\partial T-W}{\partial \alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'}-L_1\right)\delta\alpha+\left(\frac{\partial T-W}{\partial \beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \beta'}-L_2\right)\delta\beta+\cdots=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\Omega-\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha-\frac{\partial T}{\partial \beta'}\delta\beta-\cdots\right),$$

oder falls man mit dt multiplicirt, und über den gegebenen Zeitraum $t_0 \cdots t_1$ integrirt; und zugleich für Ω seine eigentliche Bedeutung (15.) substituirt:

$$(17.)\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial T-W}{\partial \alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'}-L_1\right)\delta\alpha+\left(\frac{\partial T-W}{\partial \beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \beta'}-L_2\right)\delta\beta+\cdots\right\}dt$$
$$=\left[\sum_{\mathfrak{R}} m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)\right]_{t_0}^{t_1}-\left[\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha+\frac{\partial T}{\partial \beta'}\delta\beta+\cdots\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Der Ausdruck *zweiter* Zeile reducirt sich, weil die $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... in den Augenblicken t_0 und t_1 verschwinden, andererseits aber die δx, δy, δz wenigstens im Augenblick t_0 verschwinden [vgl. (10.), (11.)] auf:

$$\left(\sum\nolimits_{\Re} m\,(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)\right)_{t_1}$$

d. i. auf denjenigen Werth, welchen die hier eingeklammerte Summe im Augenblicke t_1 besitzt. Mit andern Worten: Jener Ausdruck zweiter Zeile reducirt sich auf

$$(\Omega)_{t_1},$$

wo alsdann Ω selber wieder die in (15.) genannte Bedeutung besitzt. Demgemäss gewinnt die Formel (17.) folgende Gestalt:

$$(18.)\quad \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial T - W}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\alpha'} - L_1\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial T - W}{\partial\beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\beta'} - L_2\right)\delta\beta + \cdots\right\} dt = (\Omega)_{t_1}.$$

Das hier auftretende Ω

$$(18.\,\mathrm{a})\qquad \Omega = \sum\nolimits_{\Re} m\,(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$$

kann, weil z. B. $x' = u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ist, auch so geschrieben werden:

$$(18.\,\mathrm{b})\qquad \Omega = \sum\nolimits_{\Re} m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\delta z\right),$$

oder falls man $m = \varrho\,dx\,dy\,dz$ setzt, auch so:

$$(18.\,\mathrm{c})\qquad \Omega = \varrho\iiint_{\Re}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\delta z\right) dx\,dy\,dz.$$

oder mit Rücksicht auf (12.) auch so:

$$(18.\,\mathrm{d})\qquad \Omega = \varrho\iiint_{\Re}\left(\frac{\partial\,(\Phi\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\Phi\delta y)}{\partial y} + \cdot\cdot\right) dx\,dy\,dz.$$

Was die weitere Untersuchung betrifft, so wollen wir vorläufig nur zwei specielle Fälle in Betracht ziehen.

Erster Fall: Der Raum $\Re$ ist einfach zusammenhängend. — Alsdann ist das Geschwindigkeitspotential Φ in $\Re$ *überall stetig*, und überhaupt den Bedingungen des Satzes p. 25 unterworfen. Somit folgt aus (18. d):

$$\Omega = \varrho\iint_{\Re}\Phi\,\big(\delta x\cos(\mathsf{N}, x) + \delta y\cos(\mathsf{N}, y) + \delta z\cos(\mathsf{N}, z)\big)\,d\sigma,$$

oder mit Rücksicht auf (13.):

$$\Omega = \varrho\iint_{\Re}\Phi\,\big(\delta\xi\cos(\mathsf{N}, x) + \delta\eta\cos(\mathsf{N}, y) + \delta\zeta\cos(\mathsf{N}, z)\big)\,d\sigma.$$

Und hieraus folgt weiter, weil die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ im Augenblicke t_1 verschwinden [vgl. (11.)], dass

$$(\Omega)_{t_1} = 0$$

ist. Demgemäss nimmt die Formel (18.) die Gestalt an:

$$(19.)\quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial (T - W)}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} - L_1 \right) \delta\alpha + \left(\frac{\partial T - W}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{d\beta'} - L_2 \right) \delta\beta + \cdots \right\} dt = 0.$$

Hieraus aber folgt weiter, weil die Variationen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... innerhalb des Zeitraumes $t_0 \ldots t_1$ *willkürliche* sind, nach bekannter Schlussweise, dass für jeden Zeitaugenblick t innerhalb jenes Zeitintervalls die Formeln stattfinden müssen:

$$(20.)\quad \begin{gathered} \frac{\partial T - W}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} - L_1 = 0, \\ \frac{\partial T - W}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \beta'} - L_2 = 0, \\ \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.} \end{gathered}$$

Substituirt man aber die hieraus für L_1, L_2, ... entspringenden Werthe in (14. b), so folgt:

$$(21.)\quad \delta L = \left(\frac{\partial T - W}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) \delta\alpha + \left(\frac{\partial T - W}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \beta'} \right) \delta\beta + \cdots$$

Diese Formeln (20.), (21.) gelten für jeden Zeitaugenblick t, der gelegen ist zwischen der Anfangszeit t_0 und einem *beliebig* gegebenen späteren Zeitaugenblick t_1. D. h. sie gelten ganz allgemein für *jedweden* Zeitaugenblick der betrachteten Bewegung.

Die Formel (21.) *ist nun zur wirklichen Berechnung von δL ausserordentlich bequem. Sie zeigt, wie man dieses δL unmittelbar finden kann, sobald nur zuvor die analytischen Ausdrücke des Gesammtpotentials W und der lebendigen Kraft T aufgestellt sind.*

Diese *zweite Methode**) zur Berechnung von δL, wie sie uns durch die Formel (21.) dargeboten wird, ist nun leider nicht allgemein gültig, sondern vorläufig noch beschränkt auf den Fall, dass der Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend ist.

Zweiter Fall: Der Raum $\mathfrak{R}$ ist zweifach zusammenhängend. — Dieser Raum $\mathfrak{R}$ kann alsdann mittelst eines Querschnittes q in einen *einfach* zusammenhängenden Raum $\mathfrak{S}$ verwandelt werden. Und die Function Φ ist alsdann im Querschnitte q mit einer constanten Differenz $\varkappa$ behaftet, sonst aber im Raume $\mathfrak{R}$ überall stetig. Andererseits sind

*) Man vgl. p. 12.

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ im Raume $\mathfrak{R}$ *überall* stetig, ohne Ausnahme [vgl. den Satz p. 30].

Da nun Φ selber nicht im Raume $\mathfrak{R}$, wohl aber im Raume $\mathfrak{S}$ überall stetig ist, so folgt aus (18. d):

$$\Omega = \varrho \iint_{\mathfrak{S}} \Phi \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \delta y \cos(\mathsf{N}, y) + \delta z \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma.$$

Dieses Integral besteht aus zwei Theilen, von denen der eine der Oberfläche von $\mathfrak{R}$, der andere aber den beiden Seiten des Querschnitts q entspricht. Demgemäss ergiebt sich:

$$\Omega = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \Phi \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \cdot\cdot\right) d\sigma + \varrho \varkappa \iint_{q} \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \cdot\cdot\right) d\sigma,$$

das letzte Integral hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ des Querschnittes q. Und zwar repräsentirt in diesem letzten Integral N die auf der *linken* Seite des Querschnittes q errichtete Normale, falls man nämlich wie früher, die Werthe von Φ zu beiden Seiten von q mit Φ und $\Phi + \varkappa$ bezeichnet, und die Seite des Werthes Φ als *linke*, die Seite des Werthes $\Phi + \varkappa$ als *rechte* Seite festsetzt.

Diese Formel für Ω lässt sich mit Rücksicht auf (13.) auch so schreiben:

$$\Omega = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \Phi \left(\delta \xi \cos(\mathsf{N}, x) + \cdot\cdot\right) d\sigma + \varrho \varkappa \iint_{q} \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \cdot\cdot\right) d\sigma.$$

Und hieraus folgt, weil die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ im Augenblick t_1 verschwinden [vgl. (11.)]

$$(22.) \qquad (\Omega)_{t_1} = \varrho \varkappa \left(\iint_{q} \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \delta y \cos(\mathsf{N}, y) + \delta z \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma\right)_{t_1}.$$

Ob nun δx, δy, δz im Augenblick t_1 verschwinden, wissen wir nicht [vgl. (11.) und die weiteren Bemerkungen daselbst]. Und demgemäss bleibt uns unbekannt, ob dieses $(\Omega)_{t_1}$ Null ist oder nicht.

Um hierüber ins Klare zu kommen, werden wir, und zwar im folgenden §., einen wesentlich andern Weg einschlagen, *und dabei schliesslich zu dem Resultat gelangen, dass dieses $(\Omega)_{t_1}$ nicht verschwindet, indessen einen Werth von sehr einfacher Form besitzt.*

§ 14.

Fortsetzung.

Der Raum $\mathfrak{R}$ sei von *beliebiger* Beschaffenheit. Stets ist nach (18. b) p. 53:

$$(\text{A.}) \qquad \Omega = \sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z\right);$$

und ferner nach (A.) p. 39:

$$(\text{B.}) \qquad \Phi = \Phi_0 + \alpha' \Phi_1 + \beta' \Phi_2 + \gamma' \Phi_3 + \delta' \Phi_4 + \varepsilon' \Phi_5 + \cdots$$

wo z. B. $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$. Substituirt man diesen Werth von Φ in den Ausdruck Ω, so folgt:

$$(\alpha.) \qquad \Omega = \mathsf{\Lambda} + \mathsf{M},$$

wo $\mathsf{\Lambda}$ und M die Bedeutungen haben sollen:

$$(\beta.) \qquad \mathsf{\Lambda} = \sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\,\delta z\right),$$

$$(\gamma.) \qquad \mathsf{M} = \left\{\begin{array}{l} \alpha' \sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\,\delta z\right) \\ + \beta' \sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\,\delta z\right) \\ + \text{etc. etc. etc.} \end{array}\right\}.$$

Das *allgemeine Glied* dieses Ausdruckes M lautet, bei Fortlassung der Factoren α', β', ..., folgendermassen:

$$\sum_{\mathfrak{R}} m \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\,\delta z\right), \text{ wo } j = 1, 2, 3, \ldots),$$

und kann daher, falls man $m = \varrho\, dx dy dz$ setzt, auch so geschrieben werden:

$$\varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\,\delta z\right) dx dy dz, \; (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung (12.) p. 50, auch so:

$$\varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial (\Phi_j \delta x)}{\partial x} + \frac{\partial (\Phi_j \delta y)}{\partial y} + \frac{\partial (\Phi_j \delta z)}{\partial z}\right) dx dy dz, \; (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, weil Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... (nicht Φ_0) im Raume $\mathfrak{R}$ überall *stetig* sind, auch so:

$$\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_j \left(\delta x \cos(\mathsf{N}, x) + \delta y \cos(\mathsf{N}, y) + \delta z \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma, \; (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung (13.) p. 50, auch so:

$$\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_j \left(\delta \xi \cos(\mathsf{N}, x) + \delta \eta \cos(\mathsf{N}, y) + \delta \zeta \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\sigma, \; (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hieraus aber folgt, weil $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ in den Augenblicken t_0 und t_1 verschwinden [vergl. (10.), (11.) p. 49], dass dieses *allgemeine Glied* in jenen Augenblicken ebenfalls verschwindet. Gleiches gilt daher auch von M selber; was angedeutet werden mag durch die Formeln:

$$(\delta.) \qquad (\mathsf{M})_{t_0} = 0, \quad (\mathsf{M})_{t_1} = 0.$$

Für $\mathsf{\Lambda}$ gelten derartige Formeln nicht. *Ueberhaupt wird es, was $\mathsf{\Lambda}$ betrifft, zweckmässig sein, nicht $\mathsf{\Lambda}$ selber, sondern den Differentialquotienten $\frac{d\mathsf{\Lambda}}{dt}$ zu untersuchen.*

Bei den folgenden Betrachtungen ist nun namentlich der *Unterschied* im Auge zu behalten, den man in der Hydrodynamik zwischen den Symbolen $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{d}{dt}$ zu machen gewohnt ist. Es sei mir gestattet, kurz daran zu erinnern.

Repräsentirt F eine Function, die für die verschiedenen Stellen der Flüssigkeit verschiedene Werthe hat, und deren Werthsystem überdiess variirt von einem Augenblick zum andern, so pflegt man, bei dem Symbol $\frac{\partial F}{\partial t}$, unter F und $F + \partial F$ diejenigen Werthe zu verstehen, welche jene Funktion in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + \partial t$ in *ein und demselben Raumpunct* besitzt, unbekümmert darum, dass während dieses kleinen Zeitintervalls ∂t andere und andere Flüssigkeitstheilchen durch diesen Raumpunct hindurchgehen. Man kann den ins Auge gefassten Raumpunct etwa markirt denken durch seine rechtwinkeligen Coordinaten (x, y, z), vorausgesetzt, dass das zur Ausmessung der Coordinaten dienende Axensystem ein *absolut festes* ist. Alsdann ist jenes ∂F zu bezeichnen als die Differenz derjenigen beiden Werthe, welche die Function F im Puncte (x, y, z) zu den Zeiten t und $t + \partial t$ besitzt. — Bei Bildung der Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ hat man also einen *festen Raumpunct* unveränderlich im Auge zu behalten, und demgemäss kann man dieselbe etwa bezeichnen als die *locale Ableitung nach der Zeit*.

Bei dem Symbol $\frac{dF}{dt}$ hingegen ist nicht ein fester Raumpunct, sondern ein *bestimmtes Flüssigkeitstheilchen*, irgend ein *individuelles Flüssigkeitsmolecül* m im Auge zu behalten, und bei seiner Bewegung zu verfolgen. In der That sind nämlich, bei diesem Symbol $\frac{dF}{dt}$, unter F und $F + dF$ diejenigen Werthe zu verstehen, welche die gegebene Function für ein solches *individuelles Theilchen* m in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ besitzt, wobei selbstverständlich die während der Zeit dt erfolgende Ortsveränderung des Theilchens m mit in Anschlag zu bringen ist. Sind z. B. (immer in Bezug auf jenes absolut feste Axensystem) x, y, z und $x + dx, y + dy, z + dz$ die Coordinaten dieses Theilchens m in den Augenblicken t und $t + dt$, so wird, was jenes Symbol $\frac{dF}{dt}$ betrifft, unter F selber der Werth der gegebenen Function zur Zeit t im Puncte x, y, z, hingegen unter $F + dF$ ihr Werth zur Zeit $t + dt$ im Puncte $x + dx, y + dy, z + dz$ zu verstehen sein. — Demgemäss kann man dieses $\frac{dF}{dt}$ etwa bezeichnen als die *das individuelle Theilchen m begleitende Ableitung*. Um solches noch schärfer hervortreten zu lassen, werde ich dem $\frac{dF}{dt}$ jedesmal das betreffende Theilchen m als Factor beifügen, also schreiben $m\frac{dF}{dt}$.

Was nun z. B. die in der Formel (β.) enthaltene Function

$$(\varepsilon.) \qquad \Phi_0 = \Phi_0(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots)$$

betrifft, so besitzt dieselbe innerhalb des von der Flüssigkeit occupirten Raumes $\mathfrak{R}$ in verschiedenen Zeitaugenblicken verschiedene Werthsysteme. Wollen wir *eines* dieser Werthsysteme, etwa das dem Augenblick t entsprechende, bilden, so haben wir in der Formel (ε.) den Parametern $\alpha, \beta, \ldots$ diejenigen speciellen Werthe zuzuertheilen, welche sie in diesem Augenblicke t besitzen, und sodann für (x, y, z) der Reihe nach sämmtliche Punkte des Raumes $\mathfrak{R}$ eintreten zu lassen. Demgemäss erhält man für die einem festen Raumpunct (x, y, z) entsprechende *locale* Ableitung von Φ_0 den Werth:

$$(\zeta.) \qquad \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots, \qquad \text{[vgl. (E.) p. 41]},$$

wo $d\alpha, d\beta, \ldots$ die Zuwüchse von $\alpha, \beta, \ldots$ während der Zeit dt vorstellen. Und andererseits wird man für die *ein individuelles Theilchen m begleitende* Ableitung $m\frac{d\Phi_0}{dt}$ den Ausdruck haben:

$$(\eta.) \quad m\frac{d\Phi_0}{dt} = m\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right),$$

wo $d\alpha, d\beta, \ldots$ die schon genannten Bedeutungen besitzen, während dx, dy, dz diejenigen Zuwüchse vorstellen, welche die Coordinaten x, y, z jenes Theilchens m während der Zeit dt erfahren. Demgemäss sind $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ nichts Anderes als die Geschwindigkeits-Componenten u, v, w des Theilchens m, so dass man also die Formel (η.) auch so schreiben kann:

$$(\eta'.) \quad m\frac{d\Phi_0}{dt} = m\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}u + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}v + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}w + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right).$$

Beiläufig sei sogleich bemerkt, dass ich im Folgenden unter dem Symbol $m\delta\Phi_0$ eine *das individuelle Theilchen m begleitende Variation*, nämlich folgenden mit (η.) analogen Ausdruck verstehen werde:

$$(\vartheta.) \quad m\delta\Phi_0 = m\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\delta\beta + \cdots\right).$$

Es bezeichnet alsdann dieses $m\delta\Phi_0$ diejenige virtuelle Veränderung, welche der das *individuelle Theilchen m begleitende Werth* $m\Phi_0$ annehmen *würde*, wenn man dieses Theilchen um $\delta x, \delta y, \delta z$ verrücken, und gleichzeitig die Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ und $\delta\alpha, \delta\beta \ldots$ vergrössern wollte.

Dies vorausgeschickt, wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe. Nach (β.) ist:

$$(\iota.)\qquad \Lambda = \sum_{\mathfrak{R}} m\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\,\delta z\right),$$

mithin:

$$(\varkappa.)\qquad \frac{d\Lambda}{dt} = \sum_{\mathfrak{R}} m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\,\delta z\right),$$

die Summation ausgedehnt über alle Flüssigkeitstheilchen m des Raumes $\mathfrak{R}$. Der hier unter dem Summationszeichen stehende Ausdruck kann mit Rücksicht auf die in (ϑ.) eingeführte Bezeichnung auch so geschrieben werden:

$$m\frac{d}{dt}\left(\delta\Phi_0 - \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\delta\beta + \cdots\right]\right),$$

oder auch so:

$$m\delta\frac{d\Phi_0}{dt} - m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\delta\beta + \cdots\right),$$

oder mit Rücksicht auf (η.), resp. (η'.) auch so:

$$m\delta\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}u + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}v + \frac{\partial\Phi_0}{\partial z}w + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\alpha' + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\beta' + \cdots\right) - m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\delta\beta + \cdots\right),$$

wo α', β', ... die Ableitungen von α, β, ... nach der Zeit vorstellen. Dieser Ausdruck aber kann schliesslich, weil $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ ist, mit Rücksicht auf die in (β.) p. 41 eingeführte Abbreviatur, auch so geschrieben werden:

$$m\delta\left((\Phi_0, \Phi) + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\alpha' + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\beta' + \cdots\right) - m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\delta\beta + \cdots\right).$$

Substituirt man aber dies in ($\varkappa$.), so erhält man für $\frac{d\Lambda}{dt}$ einen Werth von der Form:

$$(\lambda.)\qquad \frac{d\Lambda}{dt} = \delta\,(A_0 + A\alpha' + B\beta' + \cdots) + \frac{dM}{dt},$$

wo die A_0, A, B, C, ... und M folgende Bedeutungen haben:

$$(\mu.)\qquad \begin{aligned} A_0 &= \sum_{\mathfrak{R}} m\,(\Phi_0, \Phi) = \varrho\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi)\,dx\,dy\,dz, \\ A &= \sum_{\mathfrak{R}} m\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha} \quad = \varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz, \\ B &= \sum_{\mathfrak{R}} m\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta} \quad = \varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,dx\,dy\,dz, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M &= -\sum_{\mathfrak{R}} m\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\delta\beta + \cdots\right); \end{aligned}$$

woraus beiläufig sich die Formeln ergeben:

$$(\nu.)\qquad (M)_{t_0} = 0 \quad \text{und} \quad (M)_{t_1} = 0;$$

denn die $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... verschwinden sowohl im Augenblick t_0, wie auch im Augenblick t_1. [Vgl. (10.), (11.) p. 49].

Der in (μ.) für A_0 gegebene Werth ist einer weiteren Vereinfachung fähig. Substituirt man nämlich daselbst für Φ den Ausdruck:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1\alpha' + \Phi_2\beta' + \cdots \quad \text{[vgl. (B.) p. 55]},$$

so erhält man:

$$A_0 = \varrho\left[\iiint_{\Re}(\Phi_0, \Phi_0)dxdydz + \alpha'\iiint_{\Re}(\Phi_0, \Phi_1)dxdydz + \beta'\iiint_{\Re}(\Phi_0, \Phi_2)dxdydz + \cdots\right.$$

Substituirt man aber hier für das *erste* Integral den in (4.) p. 45 angegebenen Werth, und beachtet, dass die *folgenden* Integrale, nach (G.) p. 43, sämmtlich $= 0$ sind, so erhält man $A_0 = 2\Theta_0$, und kann daher z. B. die Formel (λ.) auch *so* schreiben:

$$(\xi.)\qquad \frac{d\mathsf{\Lambda}}{dt} = \delta\,(2\Theta_0 + A\alpha' + B\beta' + \cdots) + \frac{dM}{dt}.$$

Nach (α.) ist nun aber $\Omega = \mathsf{\Lambda} + \mathsf{M}$, mithin:

$$(o.)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\mathsf{\Lambda}}{dt} + \frac{d\mathsf{M}}{dt},$$

also mit Rücksicht auf (ξ.):

$$(\pi.)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = \delta\,(2\Theta_0 + A\alpha' + B\beta' + \cdots) + \frac{d(M + \mathsf{M})}{dt},$$

wobei zu bemerken ist, dass der Ausdruck $(M + \mathsf{M})$ in den beiden Augenblicken t_0 und t_1 verschwindet:

$$(\varrho.)\qquad (M + \mathsf{M})_{t_0} = 0, \quad (M + \mathsf{M})_{t_1} = 0, \quad \text{[vgl. } (\delta.) \text{ und } (\nu.)].$$

§ 15.

Fortsetzung und Schluss.

Wir kehren jetzt zurück zu unserer Hauptformel:

$$(23.)\qquad \left(\delta\,[T - W] - \delta L\right) dt = \frac{d\Omega}{dt}\,dt, \quad \text{[vgl. (15.) p. 52]}.$$

Integrirt man diese Formel über den gegebenen Zeitraum $t_0 \ldots t_1$, so ergiebt sich, falls man gleichzeitig für $\frac{d\Omega}{dt}$ den Werth (π.) substituirt, und Rücksicht auf (ϱ.) nimmt:

$$(24.)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L - \delta\,[T - W] + \delta\,[2\Theta_0 + A\alpha' + B\beta' + \cdot\cdot]\right)dt = 0,$$

$$(25.)\qquad \text{d. i.}\quad \int_{t_0}^{t_1}(\delta L - \delta f)\,dt = 0,$$

wo alsdann f die Bedeutung hat:

$$(26.)\qquad f = T - W - 2\Theta_0 - (A\alpha' + B\beta' + \cdots).$$

Bekanntlich hängt T von $\alpha, \beta, \ldots \alpha', \beta', \ldots$ ab, während andererseits W, Θ_0, A, $B, \ldots$ *nur* von den $\alpha, \beta, \ldots$. (nicht aber von den $\alpha', \beta', \ldots$) abhängig sind; [vgl. p. 52, ferner (4.) p. 45, und (μ.) p. 59]. Somit folgt aus (26.):

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\delta\beta + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\delta\alpha' + \frac{\partial f}{\partial \beta'}\delta\beta' + \cdots\right),$$

oder weil z. B. $\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\delta\alpha' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\delta\alpha\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\right)\delta\alpha$ ist:

$$\text{(g.)} \qquad \delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)\delta\beta + \cdots\cdot$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta'}\delta\beta + \cdots\right).$$

Ueberdiess ist:

$$\text{(h.)} \qquad \delta L = L_1\delta\alpha + L_2\delta\beta + \cdots\cdot \qquad \text{[vgl. (h.) p. 52].}$$

Substituirt man diese Werthe (g.), (h.) in die Formel (25.), und beachtet dabei, dass die $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots$ in den beiden Zeitaugenblicken t_0 und t_1 verschwinden [vgl. (10.), (11.) p. 49], so ergiebt sich nach bekannter Schlussweise:

$$\text{(27.)} \qquad \begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}, \\ L_2 &= \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \beta'}. \end{aligned}$$

. . . .

Und diese Formeln (27.) zeigen also, wie man, falls der Ausdruck f (26.) gebildet ist, aus diesem unmittelbar die Werthe von $L_1, L_2 \ldots$ abzuleiten vermag.

§ 16.

Zusammenstellung der erhaltenen Resultate.

Man denke sich eine von beliebig vielen Membranen begrenzte incompressible Flüssigkeit, und diese Membranen (ihrer Lage und Gestalt nach) abhängig von irgend welchen Parametern $\alpha, \beta, \ldots$, die ihrerseits gegebene Functionen der Zeit sind; sodass also die Membranen in vorgeschriebener Bewegung sich befinden.

Die Bewegung der Flüssigkeit ist alsdann eine völlig bestimmte. Denn es soll gegeben sein der wirbelfreie Anfangszustand derselben; und ebenso sollen auch gegeben sein die die Flüssigkeit sollicitirenden äussern Kräfte, oder vielmehr das nur von den Coordinaten abhängende Potential dieser Kräfte. Bezeichnet man letzteres mit $V = V(x, y, z)$, so wird z. B. das von den äussern Kräften auf die Flüssigkeit ausgeübte Ge-

sammtpotential W *den Werth haben:*

(1.) $$W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz,$$ [vgl. p. 12, 13],

wo ϱ *die constante Dichtigkeit der incompressiblen Flüssigkeit vorstellt, und die Integration ausgedehnt zu denken ist über alle Volumelemente* $dx dy dz$ *des von der Flüssigkeit occupirten Raumes* $\mathfrak{R}$.

Um die Bewegung der Flüssigkeit wirklich zu ermitteln, hat man das Geschwindigkeitspotential Φ *zu berechnen. Für dieses wird man einen Ausdruck erhalten von der Form:*

(2.) $$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \alpha' + \Phi_2 \beta' + \cdots$$ [vgl. (A.) p. 39],

wo $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$, $\beta' = \frac{d\beta}{dt}, \ldots$ *ist, während* $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ *Functionen von* $x, y, z, \alpha, \beta, \ldots$ *vorstellen. Wie diese Functionen zu berechnen sind, oder vielmehr, welchen Bedingungen dieselben zu genügen haben, ist früher gezeigt worden* [vgl. p. 39, 40].

Wir wollen annehmen, diese Rechnung sei wirklich ausgeführt, und es seien also $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots,$ *mithin auch* Φ *selber, mithin auch die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit*

(3.) $$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

wirklich bekannt. Auf Grund dieser Kenntnisse kann man alsdann sofort die Integrale berechnen:

(4.) $$A = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} dx dy dz, \qquad B = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} dx dy dz,$$ [vgl. (μ.) p. 59]

etc. etc.

sowie auch die Integrale:

(5.) $$\Theta_0 = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_0)\, dx dy dz, \qquad \Theta_{jk} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_j, \Phi_k)\, dx dy dz,$$ [vgl. (4.) p. 45]

wo das Symbol (F, G) *die Bedeutung haben soll:*

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z},$$ [vgl. (β.) p. 41].

Solches ausgeführt gedacht, wird alsdann die lebendige Kraft T *der Flüssigkeit den Werth haben:*

(6.) $$T = \Theta_0 + [\Theta_{11}\alpha'^2 + 2\Theta_{12}\alpha'\beta' + \cdots],$$ [vgl. (3.) p. 45],

wo der eingeklammerte Ausdruck eine homogene Function zweiten Grades von $\alpha', \beta', \ldots$ *ist.*

Aus diesen Darlegungen geht unmittelbar hervor, dass $W, A, B, \dots$ ferner $\Theta_0, \Theta_{11}, \Theta_{12}, \dots$ lediglich von $\alpha, \beta, \dots$ (nicht aber von $\alpha', \beta' \dots$) abhängen, während hingegen T sowohl von den $\alpha, \beta, \dots$ wie auch von den $\alpha', \beta', \dots$ abhängt.

Will man nun endlich die von der Flüssigkeit auf die Membranen ausgeübte virtuelle Arbeit:

(7.) $$\delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \cdots \quad \text{[vgl. p. 11, 12]}$$

berechnen, d. i. diejenige Arbeit, welche die in Wirklichkeit von der Flüssigkeit auf die Membranen ausgeübten Druckkräfte, bei irgend einer durch $\delta\alpha, \delta\beta, \dots$ definirten Gestalts- und Lagen-Veränderung der Membranen, leisten würden, so kann man sich hiebei des Hamilton'schen Princips bedienen. Und zwar findet man mittelst dieses Princips für jene Arbeit δL die Formel:

(8.) $$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L - \delta f)\, dt = 0, \quad \text{[vgl. (25.) p. 60.]},$$

wo das f die Bedeutung hat:

(9.) $$f = T - W - 2\Theta_0 - (A\alpha' + B\beta' + \cdots), \quad \text{[vgl. (26.) p. 60.]}.$$

Dabei repräsentirt t_0 den Augenblick des Anfangszustandes und t_1 einen beliebig gegebenen spätern Zeitaugenblick. Ueberdiess sind bei Anwendung der Formel (8.) *die Variationen $\delta\alpha, \delta\beta, \dots$ so eingerichtet zu denken, dass sie in jenen beiden Zeitaugenblicken t_0 und t_1 verschwinden. Durch weitere Behandlung der Formel* (8.) *ergeben sich alsdann für die in δL* (7.) *enthaltenen Coefficienten $L_1, L_2, \dots$ die Werthe:*

(10.) $$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}, \\ L_2 &= \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \beta'}, \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad \text{[vgl. (27.) p. 61.]}$$

Und diese Werthe) lassen sich, falls man für f seine eigentliche Bedeutung* (9) *substituirt, auch so schreiben:*

10.a) $$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial(T-W-2\Theta_0)}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\alpha'} + \left[\quad 0 \quad + \left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\beta' + \left(\frac{\partial A}{\partial\gamma} - \frac{\partial C}{\partial\alpha}\right)\gamma' + \cdots\right], \\ L_2 &= \frac{\partial(T-W-2\Theta_0)}{\partial\beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\beta'} + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\alpha' + \quad 0 \quad + \left(\frac{\partial B}{\partial\gamma} - \frac{\partial C}{\partial\beta}\right)\gamma' + \cdots\right], \\ L_3 &= \frac{\partial(T-W-2\Theta_0)}{\partial\gamma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\gamma'} + \left[\left(\frac{\partial C}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\gamma}\right)\alpha' + \left(\frac{\partial C}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\gamma}\right)\beta' + \quad 0 \quad + \cdots\right], \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

---

*) Dass diese Werthe in Einklang sind mit den Anforderungen des *Princips der lebendigen Kraft*, lässt sich leicht beweisen, wie *später* bei passender Gelegenheit gezeigt werden soll.

Demgemäss wird also jeder der Coefficienten L_1, L_2, L_3 . . . einen Werth haben von der Form:

$$(10.b)\quad \lambda_0 + (\lambda_1\alpha' + \lambda_2\beta' + \cdots) + (\lambda_{11}\alpha'^2 + 2\lambda_{12}\alpha'\beta' + \cdots) + (\Lambda_1\alpha'' + \Lambda_2\beta'' + \cdots),$$

wo die λ, Λ Functionen der α, β, γ, . . . vorstellen.

§ 17.

Weitere Bemerkungen.

Zusatz. — *Ist der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$ einfach zusammenhängend, so verschwinden Θ_0 und A, B, C, ...; sodass man in diesem Fall zu den früheren Formeln* (20.) pag. 54 *zurückgelangt. Ist hingegen der Raum $\mathfrak{R}$ mehrfach zusammenhängend, so wird das Θ_0 im Allgemeinen weder Null, noch eine Constante, sondern eine wirkliche Function von α, β, . . . sein.*

Beweis des Zusatzes. — Für den Fall eines *einfach* zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ kommen die Querschnitte q, q', q'', . . . und die Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, . . . in den Bedingungen (B_0.) pag. 39 *in Wegfall;* sodass also diese Bedingungen die Gestalt annehmen

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \Phi_0,\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x},\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial y},\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z}\ \textit{stetig},\ \text{und}\ \Delta\Phi_0 = 0,\ \text{im Raume}\ \mathfrak{R}; \\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial N} = 0,\ \text{an der Oberfläche des Raumes}\ \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Diesen Bedingungen wird aber genügt durch

$$(\beta.)\qquad \Phi_0 = h(t),$$

wo $h(t)$ eine unbestimmte Function der Zeit, hingegen unabhängig von x, y, z ist. Auch erkennt man aus dem Satze (1.) p. 25, dass dieser Werth von Φ_0 nothwendiger Weise der *richtige* ist. Denn neben diesem Werthe kann, zufolge jenes Satzes, kein anderer existiren, welcher ebenfalls den gestellten Bedingungen (α.) Genüge leistete. — Aus (β.) ergiebt sich nun sofort [weil $h(t)$ als *Null* betrachtet werden darf, vgl. p. 40]:

$$(\gamma.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z} = 0,\ \text{mithin auch: } (\Phi_0, \Phi_0) = 0. \\ \text{und ferner: } \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha} = 0,\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\beta} = 0,\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln (γ.) aber folgt weiter:

$$(\delta.)\quad \begin{cases} \Theta_0 = 0,\ \text{[nach (5.) p. 62]}, \\ A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ \text{etc. etc. [nach (4.) p. 62]}. \end{cases}$$

Und hiemit ist der *erste* Theil des Zusatzes bewiesen. **Andererseits** ergiebt sich der *zweite* Theil desselben direct aus (7.) p. 46.

§ 18.

Ueber einen sich leicht darbietenden Weg zur Verification der dem Princip der lebendigen Kraft und andrerseits dem Hamilton'schen Princip entsprechenden Formeln.

Dieser Weg besteht im Wesentlichen darin, dass man die in jenen Formeln enthaltenen Grössen

$$(\alpha.) \qquad W,\ T,\ \delta L,\ dL \ \text{ und } \ L_1,\ L_2,\ \cdots\cdot$$

sämmtlich durch Φ ausdrückt, und sodann, mittelst der bekannten Eigenschaften von Φ, nachweist, dass jene Formeln wirklich stattfinden.

Wir wollen in diesem § zuvörderst zeigen, *in welcher Weise* die genannten Grössen durch Φ sich ausdrücken.

Nach der Definition der Grössen ist (vgl. p. 13 und 11):

$$(\beta.) \qquad W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz,$$

$$(\gamma.) \qquad T = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (u^2 + v^2 + w^2)\, dx dy dz,$$

$$(\delta.) \qquad \delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \cdots,$$

$$(\varepsilon.) \qquad dL = L_1 d\alpha + L_2 d\beta + \cdots,$$

ferner:

$$(\zeta.) \qquad \begin{aligned} L_1 &= \iint_{\mathfrak{R}} p \mathsf{A} d\sigma, \\ L_2 &= \iint_{\mathfrak{R}} p \mathsf{B} d\sigma, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Substituirt man nun hier für u, v, w, p die aus unsern Grundformeln (II.), (III. a) p. 19 sich ergebenden Werthe:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$p = -\varrho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\Phi,\Phi)}{2} + V \right) + \varrho H(t),$$

und beachtet man dabei die früher gefundenen Gleichungen (p. 8):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{A} d\sigma &= 0, \\ \iint_{\mathfrak{R}} \mathsf{B} d\sigma &= 0, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

so erhält man:

$$(1.) \qquad W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz,$$

$$(2.) \qquad T = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi)\, dx dy dz,$$

und ferner:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} L_1 &= -\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\Phi,\Phi)}{2} + V\right) \mathsf{A}\, d\sigma; \\ L_2 &= -\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\Phi,\Phi)}{2} + V\right) \mathsf{B}\, d\sigma, \end{aligned}$$

etc. etc.

Multiplicirt man ferner diese Formeln (3.) resp. mit $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \cdots$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (ε.):

$$\frac{dL}{dt} = -\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\Phi,\Phi)}{2} + V\right)\left(\mathsf{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathsf{B}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) d\sigma,$$

also falls man die Grundformel (I. c) p. 19 beachtet:

$$(4.)\qquad \frac{dL}{dt} = -\varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\Phi,\Phi)}{2} + V\right) \frac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma.$$

Setzt man nun

$$(5.)\qquad \Xi = \frac{dL}{dt} + \frac{d(T+W)}{dt},$$

so muss sich auf Grund der Ausdrücke (1.), (2.), (4.), und unter Benutzung der bekannten Eigenschaften der Function Φ nachweisen lassen, dass dieses $\Xi = 0$ ist. Denn andrerseits würde die dem Princip der lebendigen Kraft entsprechende Formel (5.) p. 37 unrichtig sein.

Und setzt man andrerseits

$$(6.)\qquad \xi = L_1 - \frac{\partial(T-W)}{\partial\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\alpha'},$$

so muss sich auf Grund der Ausdrücke (1.), (2.), (3.) zeigen lassen, dass dieses $\xi = -2\frac{\partial\Theta_0}{\partial\alpha} + \left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\beta' + \left(\frac{\partial A}{\partial\gamma} - \frac{\partial C}{\partial\alpha}\right)\gamma' + \cdots$ ist. Denn andernfalls würden die dem Hamilton'schen Princip entsprechenden Formeln (10.a.) p. 63 unrichtig sein.

§ 19.

Verification der dem Princip der lebendigen Kraft entsprechenden Formel.

Es handelt sich darum, den Ausdruck Ξ (5.) wirklich zu bilden. Zu diesem Zwecke ist zunächst die aus (1.), (2.) entspringende Formel:

$$(7.)\qquad T + W = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi,\Phi) + 2V\right) dx\,dy\,dz$$

nach der Zeit zu differenziren.

Will man nun aber ein Integral von der Form (7.), d. i. von der Form:

(a.) $J = \iiint_{\mathfrak{R}} f dx dy dz, \quad \text{wo } f = f(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots \alpha', \beta', \ldots)$

nach der Zeit differenziren, so ist zu beachten, dass das gegebene materielle System sich in *Bewegung* befindet, mithin Gleiches z. B. auch gilt von dem Integrationsraum $\mathfrak{R}$. Bezeichnet man die Lage und Gestalt dieses Raumes in den Augenblicken t und $t + dt$ resp. mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, und den Werth des betrachteten Integrals in diesen Augenblicken mit J und $J + dJ$, so wird also:

(b.) $J = \iiint_{\mathfrak{R}} f dx dy dz,$

(c.) $dJ = \iiint_{\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}} f dx dy dz + \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt\right) dx dy dz,$

wo

(d.) $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \alpha' + \frac{\partial f}{\partial \beta} \beta' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \alpha'} \alpha'' + \frac{\partial f}{\partial \beta'} \beta'' + \cdots$

Sind ξ, η, ζ und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ die Coordinaten irgend eines Membranelementes $d\sigma$ zu den Zeiten t und $t + dt$, so wird die Grenze des Raumes $\mathfrak{R}$ in der Richtung der auf $d\sigma$ errichteten (von der Flüssigkeit, d. i. von $\mathfrak{R}$ abgewendeten) Normale N während der Zeit dt um eine Strecke dN vorrücken, welche den Werth hat:

(e.) $d\mathsf{N} = d\xi \cos(\mathsf{N}, x) + d\eta \cos(\mathsf{N}, y) + d\zeta \cos(\mathsf{N}, z);$

so dass also nach (ϑ.) pag. 17 dieses

(f.) $d\mathsf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} dt$

ist. Das *erste* Integral in (c.), welches sich ausdehnt über den schaalenförmigen Raum $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$, kann nun, unter Anwendung dieses dN, *so* geschrieben werden:

$$\iint_{\mathfrak{R}} f d\mathsf{N} d\sigma,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes $\mathfrak{R}$. Demgemäss nimmt jene Formel (c.), falls man sie durch dt dividirt, und für J seine eigentliche Bedeutung substituirt, die Gestalt an:

(g.) $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathfrak{R}} f dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} f \frac{d\mathsf{N}}{dt} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz.$

oder, falls man für dN seinen Werth (f.) einsetzt, folgende Gestalt:

(h.) $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathfrak{R}} f dx dy dz = \iint_{\mathfrak{R}} f \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz.$

Differenzirt man nun die Gleichung (7.) nach der Zeit, so erhält man nach Vorschrift der Formel (h.):

(8.) $\frac{d(T + W)}{dt} = \frac{\varrho}{2} \left\{ \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi, \Phi) + 2V\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial (\Phi, \Phi)}{\partial t} dx dy dz \right\};$

denn es ist zu beachten, dass das Potential V von t unabhängig ist. Das *letzte* Integral dieser Formel (8.)

$$\iiint_{\Re} \frac{\partial(\Phi, \Phi)}{\partial t} dxdydz = 2\iiint_{\Re}\left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) dxdydz = 2\iiint_{\Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \Phi\right) dxdydz$$

kann offenbar behandelt werden nach Vorschrift der Formel (ζ.) p. 42, und verwandelt sich alsdann in das Oberflächen-Integral:

$$2\iint_{\Re} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma.$$

Jene Formel (8.) nimmt somit die Gestalt an:

$$\text{(9.)} \qquad \frac{d(T+W)}{dt} = \frac{\varrho}{2}\iint_{\Re}\left((\Phi, \Phi) + 2V + 2\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma.$$

Nach (4.) ist aber:

$$\text{(10.)} \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{\varrho}{2}\iint_{\Re}\left(2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\Phi, \Phi) + 2V\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma;$$

und substituirt man diese Werthe (9.), (10.) in (5.), so erhält man

$$\text{(11.)} \qquad \Xi = 0. \qquad Q.\ e.\ d.$$

§ 20.

Verification der dem Hamilton'schen Princip entprechenden Formeln.

Es handelt sich hier [vgl. pag. 66] um die Berechnung des Ausdruckes

$$\text{(1.)} \qquad \xi = L_1 - \frac{\partial(T-W)}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'},$$

wo T, $T-W$ und L_1 die Werthe haben:

$$\text{(2.)} \qquad T = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\Re} (\Phi, \Phi)\, dxdydz,$$

$$\text{(3.)} \qquad T - W = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\Re} \big((\Phi, \Phi) - 2V\big)\, dxdydz,$$

$$\text{(4.)} \qquad L_1 = -\frac{\varrho}{2}\iint_{\Re}\left((\Phi, \Phi) + 2V + 2\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathsf{A}\, d\sigma.$$

Dabei sei sogleich daran erinnert, dass Φ und (Φ, Φ) sich so ausdrücken lassen (vgl. p. 39):

$$\text{(5.)} \qquad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1\alpha' + \Phi_2\beta' + \Phi_3\gamma' + \cdots$$

$$\text{(6.)} \qquad (\Phi, \Phi) = (\Phi_0, \Phi_0) + 2(\Phi_0, \Phi_1)\,\alpha' + 2(\Phi_0, \Phi_2)\,\beta' + \cdots$$
$$+ (\Phi_1, \Phi_1)\,\alpha'^2 + 2(\Phi_1, \Phi_2)\,\alpha'\beta' + \cdots$$

Um nun das ξ (1.) wirklich zu berechnen, sind die Integrale (2.), (3.) partiell nach α', resp. nach α zu differenziren.

Will man nun aber ein Integral von der Form

$$(a.)\quad J = \iiint_{\mathfrak{R}} f\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{wo } f = f(x, y, z, \alpha, \beta, \cdots \alpha', \beta', \cdots)$$

partiell nach α' oder α differenziren, so ist zu beachten, dass die augenblickliche Lage und Gestalt des Integrationsraumes $\mathfrak{R}$ von α, nicht aber α' abhängt. Demgemäss ist z. B.:

$$(b.)\quad \frac{\partial}{\partial \alpha'} \iiint_{\mathfrak{R}} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial \alpha'}\,dx\,dy\,dz.$$

Was andrerseits die Differentiation nach α selber betrifft, so erhält man analog mit (g.) p. 67 die Formel:

$$(c.)\quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \iiint_{\mathfrak{R}} f\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} f \frac{d\mathsf{N}}{d\alpha}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx\,dy\,dz.$$

Dabei bezeichnet $d\alpha$ den der Variablen α ertheilten Zuwachs, und $d\mathsf{N}$ diejenige Strecke, um welche, in Folge dieses Zuwachses, die Grenze des Raumes $\mathfrak{R}$ in der Richtung der auf $d\sigma$ errichteten Normale N vorrückt. Dieses $d\mathsf{N}$ hat daher den Werth:

$$d\mathsf{N} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \cos(\mathsf{N}, z)\right) d\alpha,$$

und kann somit, nach (5.) p. 7, auch so ausgedrückt werden:

$$d\mathsf{N} = \mathsf{A}\,d\alpha.$$

Dies in (c.) substituirt, erhält man:

$$(d.)\quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \iiint_{\mathfrak{R}} f\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} f \mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx\,dy\,dz.$$

Nach Vorschrift dieser Formel (d.) ergiebt sich nun aus (3.):

$$(7.)\quad \frac{\partial (T - W)}{\partial \alpha} = \frac{\varrho}{2} \left\{ \iint_{\mathfrak{R}} \big((\Phi, \Phi) - 2V\big) \mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial (\Phi, \Phi)}{\partial \alpha}\,dx\,dy\,dz \right\};$$

denn es ist zu beachten, dass V von α unabhängig. Andrerseits ergiebt sich aus (2.) nach Vorschrift der Formel (b.):

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial (\Phi, \Phi)}{\partial \alpha'}\,dx\,dy\,dz,$$

oder weil $\frac{\partial (\Phi, \Phi)}{\partial \alpha'} = 2\left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha'}\right)$, d. i. $= 2(\Phi, \Phi_1)$ ist [vgl. (5.)]:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} 2(\Phi, \Phi_1)\,dx\,dy\,dz.$$

Um nun weiter von diesem Ausdrucke den vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit zu bilden, hat man zu verfahren nach Vorschrift der früheren Formel (h.) p. 67. Man erhält alsdann:

$$(8.)\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} = \frac{\varrho}{2} \left\{ \iint_{\mathfrak{R}} 2(\Phi, \Phi_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} 2\,\frac{\partial (\Phi, \Phi_1)}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \right\}.$$

Die in (7.) und (8.) enthaltenen *Raum*-Integrale

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial(\Phi, \Phi)}{\partial \alpha}\, dxdydz = \iiint_{\mathfrak{R}} 2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \Phi\right) dxdydz,$$

$$\iiint_{\mathfrak{R}} 2\,\frac{\partial(\Phi, \Phi_1)}{\partial t}\, dxdydz = \iiint_{\mathfrak{R}} \left(2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \Phi_1\right) + 2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \Phi\right)\right) dxdydz$$

können behandelt werden nach Vorschrift der Formel ($\mathfrak{z}$.) p. 42. Man erhält alsdann:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial(\Phi, \Phi)}{\partial \alpha}\, dxdydz = \iint_{\mathfrak{R}} 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma,$$

$$\iiint_{\mathfrak{R}} 2\,\frac{\partial(\Phi, \Phi_1)}{\partial t}\, dxdydz = \iint_{\mathfrak{R}} \left(2\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} + 2\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma.$$

Substituirt man diese Werthe in (7.), (8.), und multiplicirt man zugleich die Formel (7.) mit -1, so folgt:

$$-\frac{\partial(T - W)}{\partial \alpha} = \varrho \left\{\iint_{\mathfrak{R}} \left(-\frac{(\Phi, \Phi)}{2} + V\right) \mathsf{A}\, d\sigma + \iint_{\mathfrak{R}} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = \varrho \left\{\iint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma + \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\mathsf{A} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma\right\};$$

denn es ist zu beachten, dass $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}$ [vgl. (B_1.) p. 39)]. Nun ist ferner nach (4.):

$$L_1 = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(-\frac{(\Phi, \Phi)}{2} - V - \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \mathsf{A}\, d\sigma.$$

Addirt man jetzt die drei letzten Formeln, so folgt mit Rücksicht auf (1.):

$$(9.) \qquad \mathfrak{x} = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi, \Phi_1) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}}\, d\sigma - \varrho \iint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi)\, \mathsf{A}\, d\sigma.$$

Nun ist, wie mit Rücksicht auf (5.) sich leicht ergiebt:

$$(\Phi_1, \Phi) = (\Phi_1, \Phi_0) + (\Phi_1, \Phi_1)\,\alpha' + (\Phi_1, \Phi_2)\,\beta' + (\Phi_1, \Phi_3)\,\gamma' + \cdots$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\,\alpha' + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta}\,\beta' + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma}\,\gamma' + \cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\,\alpha' + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\,\beta' + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha}\,\gamma' + \cdots$$

Ausserdem ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}\alpha' + \mathsf{B}\beta' + \Gamma\gamma' + \cdots \qquad \text{[vgl. p. 18]}$$

und endlich ist nach (6.)

$$(\Phi, \Phi) = (\Phi_0, \Phi_0) + 2(\Phi_0, \Phi_1)\,\alpha' + 2(\Phi_0, \Phi_2)\,\beta' + \cdots$$
$$+ (\Phi_1, \Phi_1)\,\alpha'^2 + 2(\Phi_1, \Phi_2)\,\alpha'\beta' + \cdots$$

Substituirt man diese Werthe in (9.), so erhält man für ξ eine Formel von der Gestalt:

$$(10.)\qquad \xi = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} F d\sigma,$$

wo das F die Bedeutung besitzt:

$$F = \left\{\begin{array}{l} \left[(\Phi_1, \Phi_0) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\right] \\ + (\Phi_1, \Phi_1)\,\alpha' \\ + \left[(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right]\beta' \\ + \left[(\Phi_1, \Phi_3) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha}\right]\gamma' \\ + \text{etc. etc.} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ + \mathsf{A}\alpha' \\ + \mathsf{B}\beta' \\ + \Gamma\gamma' \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} (\Phi_0, \Phi_0) \\ + 2(\Phi_0, \Phi_1)\,\alpha' + 2(\Phi_0, \Phi_2)\,\beta' \\ + 2(\Phi_0, \Phi_3)\,\gamma' + \text{etc. etc.} \\ + (\Phi_1, \Phi_1)\,\alpha'^2 \\ + 2(\Phi_1, \Phi_2)\,\alpha'\beta' + \text{etc. etc.} \end{array}\right\} \mathsf{A}.$$

Substituirt man jetzt dieses F in (10.), und ordnet nach den α', β', γ', $\cdots$, so erhält man für ξ einen Ausdruck von der Form:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} \xi = G_0 &+ G_1\alpha' + G_2\beta' + G_3\gamma' + \cdots \\ &+ G_{11}\alpha'^2 + G_{12}\alpha'\beta' + \cdots \end{aligned}$$

wo die G leicht angebbar sind, nämlich die Werthe haben:

$$(12.)\qquad G_0 = -\,\varrho \iint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_0)\,\mathsf{A}\,d\sigma,$$

$$(13.)\qquad G_1 = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[(\Phi_1, \Phi_0) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\right]\mathsf{A} - 2(\Phi_1, \Phi_0)\,\mathsf{A}\right) d\sigma,$$

$$(14.)\qquad G_2 = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[(\Phi_1, \Phi_0) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\right]\mathsf{B} - 2(\Phi_2, \Phi_0)\,\mathsf{A}\right) d\sigma,$$

etc. etc. etc.

$$(15.)\qquad G_{11} = 0,$$

$$(16.)\qquad G_{12} = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right]\mathsf{A} + (\Phi_1, \Phi_1)\,\mathsf{B} - 2(\Phi_1, \Phi_2)\,\mathsf{A}\right) d\sigma,$$

etc. etc. etc.

$$(17.)\qquad G_{22} = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right]\mathsf{B} - (\Phi_2, \Phi_2)\,\mathsf{A}\right) d\sigma,$$

$$(18.)\qquad \begin{aligned} G_{23} = \varrho \iint_{\mathfrak{R}} \Bigg(&\left[(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right]\Gamma \\ &+ \left[(\Phi_1, \Phi_3) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha}\right]\mathsf{B} - 2(\Phi_2, \Phi_3)\,\mathsf{A}\Bigg) d\sigma, \end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Weitere G's braucht man offenbar nicht anzugeben. Denn bei unserer ganzen Betrachtung nimmt die Gruppe

$$(1,\ \alpha,\ \mathsf{A})$$

d. h. der Index 1 und die ihm beigeordneten Grössen α, A eine *bevorzugte Stelle* ein gegenüber den Gruppen

$$(2,\ \beta,\ \mathsf{B}),\quad (3,\ \gamma,\ \Gamma),\quad (4,\ \delta,\ \Delta),\quad \text{etc. etc.}$$

während diese letzteren Gruppen einander *völlig parallel* stehen. Bezeichnet man also mit j, k irgend zwei *von* 1 *verschiedene* Zahlen, so sind erstens

alle G_j *analog mit* G_2, G_3 (*nicht mit* G_1);

und ferner sind alsdann

alle G_{1j} *analog mit* G_{12},
alle G_{jj} *analog mit* G_{22},
alle G_{jk} *analog mit* G_{23}.

Um nun die G's wirklich zu berechnen, und in solcher Weise das unbekannte ξ (11.) zu finden, sind weitere Untersuchungen anzustellen. Wir werden der Reihe nach zuerst G_0, sodann die übrigen G mit nur *einem* Index, endlich die G mit *doppeltem* Index in Betracht ziehen.

Berechnung von G_0. Nach (d.) p. 69 ist:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_0)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_0)\,\mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial(\Phi_0,\Phi_0)}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz.$$

Das *letzte* Integral dieser Formel kann auch so geschrieben werden:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} 2\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha},\ \Phi_0\right)dx\,dy\,dz,$$

oder nach (ζ.) p. 42 auch so:

$$\iint_{\mathfrak{R}} 2\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma,$$

und hat daher, weil $\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathsf{N}} = 0$ ist [vgl. (B_0.) pag. 39], den Werth *Null*. Somit folgt:

$$\iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_0)\,\mathsf{A}\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_0)\,dx\,dy\,dz,$$

also nach (12.):

$$G_0 = -\,\varrho\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_0)\,dx\,dy\,dz,$$

oder was dasselbe ist:

$$G_0 = -\,2\,\frac{\partial\Theta_0}{\partial\alpha}, \tag{19.}$$

wo Θ_0 das erste Glied im Ausdruck der lebendigen Kraft T vorstellt [vgl. (4.) p. 45].

Berechnung der übrigen G mit einfachem Index. — Nach (d.) p. 69 erhält man die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0, \Phi_j)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0, \Phi_j)\,\mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial(\Phi_0, \Phi_j)}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz, \quad j = 1,2,3,\cdots$$

deren linke Seite, zufolge (G.) p. 43, *verschwindet*; sodass also die Formel die Gestalt annimmt:

$$\iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0, \Phi_j)\,\mathsf{A}\,d\sigma = -\iiint_{\mathfrak{R}}\left(\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}, \Phi_j\right) + \left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial\alpha}, \Phi_0\right)\right)dx\,dy\,dz, \; j = 1,2,3,\cdots$$

Hieraus aber folgt, falls man die rechte Seite nach Vorschrift der Formel (ζ.) p. 42 behandelt:

$$\iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0, \Phi_j)\,\mathsf{A}\,d\sigma = -\left\{\iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma + \iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma\right\}, \; j = 1,2,3,\cdots$$

Setzt man hier das j successive $= 1, 2$, und beachtet, dass $\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathsf{N}} = 0$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathsf{N}} = \mathsf{A}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathsf{N}} = \mathsf{B}$ ist, so erhält man:

$$(\pi.)\quad \iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_1)\,\mathsf{A}\,d\sigma = -\iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\mathsf{A}\,d\sigma, \quad \iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_2)\,\mathsf{A}\,d\sigma = -\iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\mathsf{B}\,d\sigma.$$

Aus der letzten Formel aber ergiebt sich, falls man 1, α, A mit 2, β, B vertauscht:

$$(\varrho.)\qquad \iint_{\mathfrak{R}}(\Phi_0,\Phi_1)\,\mathsf{B}\,d\sigma = -\iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\mathsf{A}\,d\sigma.$$

Mit Rücksicht auf (π.) und (ϱ.) nehmen nun die Formeln (13.), (14.) die Gestalt an:

$$(\sigma.)\qquad G_1 = 0,$$

$$(\tau.)\qquad G_2 = \varrho\iint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\mathsf{B} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\mathsf{A}\right)d\sigma.$$

Nun ist nach (d.) p. 69:

$$(v.)\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\alpha\partial\beta}\,dx\,dy\,dz,$$

also, falls man α, A mit β, B vertauscht:

$$(\varphi.)\quad \frac{\partial}{\partial\beta}\iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\mathsf{B}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\alpha\partial\beta}\,dx\,dy\,dz.$$

Aus (v.) und (φ.) ergiebt sich aber durch Subtraction eine Gleichung, mittelst deren die Formel (τ.) folgende Gestalt annimmt:

$$(\chi.)\quad G_2 = \varrho\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,dx\,dy\,dz\right) = \frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha},$$

wo A, B die früher [in (4.) p. 62] festgesetzten Bedeutungen haben. Analoge Werthe findet man für $G_3, G_4, \ldots$ [vgl. die Notiz p. 72, oben];

so dass man also für die G *mit einfachem Index*, nach (σ.) und (χ.) folgende Ausdrücke erhält:

$$(20.)\quad G_1 = 0,\quad G_2 = \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha},\quad G_3 = \frac{\partial A}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \alpha},\ \text{etc. etc.}$$

Berechnung der G mit doppeltem Index. — Setzt man:

$$J = \iiint_{\mathfrak{R}} \Phi_j dx dy dz,\quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

so ist nach (d.) p. 69:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_j \mathsf{A} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha} dx dy dz,\quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

Das *erste* Integral der rechten Seite kann nun, weil $\mathsf{A} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}}$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \Phi_j \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} d\sigma,\quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

oder nach (γ.) p. 41 auch so:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_j, \Phi_1)\, dx dy dz,\quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

Somit folgt:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \iiint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_j, \Phi_1) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha}\right) dx dy dz,\quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

Differenzirt man dieses Integral von Neuem, und zwar nach β, so erhält man, und zwar wieder nach Vorschrift der Formel (d.) p. 69:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} = \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_j, \Phi_1) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha}\right) \mathsf{B} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial (\Phi_j, \Phi_1)}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \alpha \partial \beta}\right) dx dy dz,\ j = 1, 2, 3 \cdot$$

Das eine der hier auftretenden Integrale lässt sich so darstellen:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial (\Phi_j, \Phi_1)}{\partial \beta} dx dy dz = \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \beta}, \Phi_1\right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta}, \Phi_j\right)\right) dx dy dz,$$

$$= \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma,$$

wie sich solches leicht ergiebt mittelst (γ.) p. 41. Substituirt man diesen Werth und beachtet, dass $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} = \mathsf{A}$ ist, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} = \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_j, \Phi_1)\, \mathsf{B} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha} \mathsf{B} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \beta} \mathsf{A} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma +$$

$$+ \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \alpha \partial \beta} dx dy dz,\qquad j = 1, 2, 3, \cdots$$

Denkt man sich von dieser Formel diejenige subtrahirt, welche entsteht, wenn man J umgekehrt zuerst nach β, und dann nach α differenzirt, so gelangt man zu folgendem Resultat:

$$(\text{f.})\quad \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_j, \Phi_1) \mathsf{B} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma = \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_j, \Phi_2) \mathsf{A} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma,\ j = 1, 2, 3, \cdot$$

Setzt man hier $j = 1$ und beachtet, dass $\frac{\partial \Phi_1}{\partial N} = A$ ist, so folgt:

$$\text{(g.)} \quad \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[-(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right] A + (\Phi_1, \Phi_1) B \right) d\sigma = 0.$$

Nun ist nach (15.):

$$\text{(21.)} \qquad G_{11} = 0;$$

andererseits aber folgt aus unserer *letzten* Formel (g.), dass das in (16.) angegebene

$$\text{(22.)} \qquad G_{12} \text{ ebenfalls } = 0$$

ist. — Setzt man ferner in (f.) das $j = 2$, und beachtet, dass $\frac{\partial \Phi_2}{\partial N} = B$ ist, so folgt:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left(\left[(\Phi_2, \Phi_1) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right] B - (\Phi_2, \Phi_2) A \right) d\sigma = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf (17.) sich ergiebt, dass

$$\text{(23.)} \qquad G_{22} = 0.$$

Setzt man endlich in (f.) das $j = 3$, und beachtet, dass $\frac{\partial \Phi_3}{\partial N} = \Gamma$ ist, so folgt:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_3, \Phi_1) B + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \Gamma \right) d\sigma = \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_3, \Phi_2) A + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \Gamma \right) d\sigma,$$

oder falls man 2, β, B mit 3, γ, Γ vertauscht:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_2, \Phi_1) \Gamma + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} B \right) d\sigma = \iint_{\mathfrak{R}} \left((\Phi_2, \Phi_3) A + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} B \right) d\sigma.$$

Durch Addition dieser beiden letzten Formeln folgt:

$$\iint \left(\left[(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right] \Gamma + \left[(\Phi_1, \Phi_3) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right] B - 2(\Phi_2, \Phi_3) A \right) d\sigma = 0;$$

und hieraus folgt mit Rückblick auf (18.):

$$\text{(24.)} \qquad G_{23} = 0.$$

Zusammenfassung. — Die soeben erhaltenen Formeln (21.), (22.), (23.), (24.) zeigen, dass die G's, mit *doppeltem* Index *sämmtlich verschwinden*, so dass man also für die Grösse ξ (11.), durch Substitution der in (19.), (20.) für G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, ..., erhaltenen Werthe, den Ausdruck erhält:

$$\text{(25.)} \quad \xi = -2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \beta' + \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \alpha} \right) \gamma' + \cdots$$

Q. e. d.

§ 21.

Ueber die Bewegung eines starren Körpers im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit.

Wir beginnen mit gewissen allgemeinen Ueberlegungen. Ist die gegebene Flüssigkeit von beliebig vielen und beliebig sich bewegenden Flächen begrenzt, und überdiess der Einwirkung äusserer Kräfte ausgesetzt, deren Potential $V = V(x, y, z)$ als eine gegebene Function der Coordinaten sich darstellt, so wird die Flüssigkeit, falls sie in irgend einem Augenblick *wirbelfrei* sein sollte, *fortdauernd* wirbelfrei bleiben. Dieser schon früher (p. 15) constatirte Satz ist an die Voraussetzung gebunden, dass *keine Reibung* stattfindet, weder innere noch äussere.

Demgemäss wird also z. B. das Wasser in einem Glase, falls dasselbe zu Anfang in Ruhe, mithin wirbelfrei ist, durch Umrühren mit einem Stabe niemals in wirbelnde Bewegung gerathen können, — vorausgesetzt, dass die Reibung als Null betrachtet werden soll. Dieser im ersten Augenblicke sehr sonderbar erscheinende Satz fordert zu einer genaueren Controle auf, und namentlich zur Beantwortung der Frage: *welcher Art denn die Bewegung sei, die unter den genannten Umständen entsteht.*

Zu diesem Zweck wollen wir einen starren Körper im Innern der Flüssigkeit in kreisförmiger Bahn herumlaufen, oder (besser ausgedrückt) *um eine feste Axe sich drehen* lassen. Zuvor aber wird es zweckmässig sein, den Fall einer *fortschreitenden Bewegung* des Körpers ins Auge zu fassen. Dabei mag der Einfachheit willen, im einen wie im andern Falle, angenommen werden, dass die gegebene Flüssigkeit nach allen Seiten ins Unendliche reicht, dass sie nämlich nach Aussen hin begrenzt sei

(1.) *von einer unbeweglichen Kugelfläche* σ_∞, deren Radius *unendlich gross* ist, und deren Mittelpunkt irgendwo *im Endlichen* liegt.

§ 22.

Erster Fall: Der starre Körper befindet sich im Innern der Flüssigkeit in einer blos fortschreitenden Bewegung.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Durch irgend welche Vorrichtungen sei die Beweglichkeit des Körpers in solcher Weise beschränkt, dass er nur sich selber parallel in der Richtung der x-Axe

fortschreiten kann*). Abgesehen von den Druckkräften, mit welchen Körper und Flüssigkeit gegenseitg aufeinander wirken, mögen noch *gegebene äussere Kräfte* vorhanden sein, welche theils auf den Körper, theils auf die Flüssigkeit influiren. Was die auf den *Körper* ausgeübten äusseren Kräfte betrifft, so mag die Summe ihrer x-Componenten mit X bezeichnet sein. Und was andererseits die auf die *Flüssigkeit* einwirkenden äusseren Kräfte anbelangt, so mag ihr Potential $V = V(x, y, z)$ heissen.

Ausserdem sei gegeben der *Anfangszustand* des Körpers, und ebenso der der Flüssigkeit, und zwar letzterer als ein *wirbelfreier*. Es soll die unter diesen Umständen stattfindende Bewegung des Körpers näher untersucht werden. Dabei mag die Gestalt des Körpers eine beliebige sein, etwa die einer Kugel, eines Ellipsoids, eines Ringes, u. s. w.

Bemerkung. — Was den als *wirbelfrei* vorausgesetzten *Anfangszustand der Flüssigkeit* betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$ einfach zusammenhängend ist, oder nicht. Im *erstern* Fall ist nämlich der Anfangszustand der Flüssigkeit durch den des Körpers bereits mitbestimmt [vgl. die Sätze (2.), (3.), (4.) p. 26]. Im *letztern* Fall hingegen wird der Anfangszustand der Flüssigkeit erst dann bestimmt sein, wenn ausser dem Anfangszustande des Körpers noch gewisse durch den Anfangszustand der Flüssigkeit charakterisirte Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ gegeben sind [vgl. die Sätze (2.), (3.) p. 31].

Denkt man sich im Innern des Körpers einen bestimmten Punct (etwa seinen Schwerpunct) markirt, und die x-Coordinate dieses Punctes mit $\mathfrak{x}$, ferner die Masse des Körpers mit M bezeichnet, so ergiebt sich für die Bewegung des Körpers die Differentialgleichung:

$$(2.) \qquad M \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p,$$

wo X die schon genannte Bedeutung hat, während X^p die x-Componenten derjenigen Wirkungen vorstellen soll, welche auf den Körper ausgeübt werden durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit.

Mittelst dieser Gleichung (2.) ist $\mathfrak{x}$ zu bestimmen als Function der Zeit t. Nehmen wir vorläufig an, diese Function $\mathfrak{x} = f(t)$ *wäre bereits* bestimmt, und der Körper bewege sich also nach Massgabe der Gleichung $\mathfrak{x} = f(t)$ in vorgeschriebener Weise, so können wir sofort alle Sätze und Formeln unserer allgemeinen Theorie in Anwendung

*) Man kann sich z. B. den Körper durchbohrt denken von zwei einander parallelen unendlich langen und unendlich dünnen Drähten, deren Lage absolut unbeweglich ist. Und man kann demgemäss sagen, der Körper sei beweglich *längs eines gegebenen festen Geleises*.

bringen. Statt der beliebig vielen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, von denen in der allgemeinen Theorie die Rede ist, haben wir dabei im gegenwärtigen Fall nur *einen* Parameter, bezeichnet mit $\mathfrak{x}$*).

Wir wollen insbesondere das *Princip der lebendigen Kraft*:

$$\frac{d(T+W)}{dt} = -\frac{dL}{dt}, \quad \text{(vgl. p. 37)}, \tag{3.}$$

anwenden; wo T die lebendige Kraft der Flüssigkeit, W das auf sie einwirkende Gesammtpotential, und dL die von ihr während der Zeit dt auf den Körper ausgeübte Arbeit vorstellt. Diese Arbeit dL besitzt offenbar im gegenwärtigen Fall den Werth:

$$dL = X^p d\mathfrak{x}, \tag{4.}$$

wo $d\mathfrak{x}$ den Zuwachs der Coordinate $\mathfrak{x}$ während der Zeit dt bezeichnet. Ferner ist:

$$T = \Theta_0 + \Theta_{11}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2; \quad \text{(vgl. p. 45)}. \tag{5.}$$

Die Grössen Θ_0 und Θ_{11} hängen im gegenwärtigen Fall lediglich von $\mathfrak{x}$ ab, d. h. sie hängen lediglich ab von der *relativen Lage des Körpers zur Kugelfläche* σ_∞ (1.). Diese relative Lage aber bleibt, weil alle Puncte jener Kugelfläche unendlich fern sind, *stets dieselbe*. Folglich sind Θ_0 und Θ_{11} *Constanten*.

Ferner gilt für W die Formel:

$$W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz, \quad \text{(vgl. p. 13)}, \tag{6.}$$

die Integration erstreckt über alle Volumelemente $dxdydz$ des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes $\mathfrak{R}$. Nun kann aber gesetzt werden: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\infty - \mathfrak{R}_j$, falls man nämlich unter $\mathfrak{R}_\infty$ den ganzen Innenraum der Kugelfläche σ_∞, andrerseits aber unter $\mathfrak{R}_j$ den Innenraum des gegebenen Körpers versteht. Demgemäss kann die Formel (6.) auch so geschrieben werden:

$$W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}_\infty} V dx dy dz - \varrho \iiint_{\mathfrak{R}_j} V dx dy dz. \tag{7.}$$

Offenbar ist das *erste* dieser beiden Integrale eine *Constante*:

$$\varrho \iiint_{\mathfrak{R}_\infty} V dx dy dz = C. \tag{α.}$$

Bezeichnet man ferner den Werth des *zweiten* mit W^j:

$$\varrho \iiint_{\mathfrak{R}_j} V dx dy dz = W^j, \tag{β.}$$

---

*) Auch im *Folgenden* werde ich die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, durch welche die augenblickliche Lage der die Flüssigkeit begrenzenden Flächen sich bestimmt, *bei speciellen Anwendungen* stets mit deutschen Buchstaben (wie $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{s}$ etc. etc.) bezeichnen.

so repräsentirt offenbar W^j dasjenige Gesammtpotential, welches die dem Potential V entsprechenden äussern Kräfte auf den betrachteten starren Körper ausüben *würden*, falls seine Materie identisch wäre mit derjenigen der gegebenen Flüssigkeit. Durch Substitution der Werthe (α.), (β.) in (7.) erhält man:

$$(8.)\qquad W = C - W^j,$$

mithin:

$$(9.)\qquad \frac{dW}{dt} = -\frac{dW^j}{dt} = -\frac{\partial W^j}{\partial \mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = X^j\frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

wo alsdann X^j die x-Componente derjenigen Wirkung vorstellt, welche die dem Potential V entsprechenden Kräfte auf den Körper ausüben *würden*, falls seine Materie identisch wäre mit derjenigen der gegebenen Flüssigkeit.

Substituirt man die Werthe (4.), (5.) und (9.) in die Formel (3.), so erhält man:

$$(10.)\qquad \frac{d}{dt}\left(\Theta_0 + \Theta_{11}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2\right) + X^j\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -X^p\frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

also weil Θ_0 und Θ_{11} Constanten sind:

$$(11.)\qquad 2\Theta_{11}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -X^j - X^p.$$

Substituirt man endlich den hieraus für X^p sich ergebenden Werth in (2.), so folgt:

$$(12.)\qquad (M + 2\Theta_{11})\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X - X^j.$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, welche unter sonst gleichen Umständen für die Bewegung des Körpers im leeren Raum gelten würde, d. i. mit der Formel:

$$M\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X,$$

so bemerkt man einen doppelten Unterschied.

Einerseits nämlich ist eine dem Princip des Archimedes entsprechende Verminderung der einwirkenden Kraft eingetreten, indem X in $(X - X^j)$ sich verwandelt hat. Und andererseits ist eine Zunahme der Trägheit des Körpers eingetreten, indem M in $(M + 2\Theta_{11})$ übergegangen ist.

Dabei bezeichnet Θ_{11} eine stets *positive* Constante, die lediglich von der Gestalt des gegebenen Körpers abhängt; wie solches sich leicht ergiebt mittelst der Formel (4.) p. 45 und mittelst der Formel (B_0), (B_1.), (B_2.), etc. p. 39.

Beiläufige Bemerkung. — Wirken von Aussen her *keinerlei* Kräfte ein, weder auf den Körper noch auf die Flüssigkeit, ist also $X = 0$, ebenso $V = 0$, mithin auch $X^j = 0$, so folgt aus (12.):

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = 0, \quad \text{d. i.} \ \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \text{Const.}$$

Ist also der Körper im Innern der Flüssigkeit längs eines festen Geleises beweglich, und wirken von Aussen her keinerlei Kräfte ein, so wird er seine anfängliche Geschwindigkeit in infinitum beibehalten, mithin in gleichen Zeiten gleiche Strecken durchlaufen.

Von der in (12.) auftretenden Kraft X^j haben wir eine deutliche Vorstellung (nämlich insofern, als sie dem Princip des Archimedes entspricht), nicht aber vom Werthe der Constanten Θ_{11}. Will man die Constante Θ_{11} berechnen, so muss man zunächst die *Bewegung der Flüssigkeit* kennen. Dies aber lässt sich in speciellen Fällen wirklich erreichen, so z. B., wenn

der gegebene Körper eine Kugel ist. Alsdann nämlich wird der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend sein. Und demgemäss ergeben sich in diesem Fall zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentiales Φ der Flüssigkeit folgende Bedingungen [vgl. p. 25*)]:

(13.) $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ *stetig*, und $\Delta\Phi = 0$, im Raume $\mathfrak{R}$;

(14.) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{d\xi}{dt} \cos(N, x) + \frac{d\eta}{dt} \cos(N, y) + \frac{d\zeta}{dt} (\cos N, z)$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Die Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ besteht theils aus der festaufgestellten Fläche σ_∞ (1.), theils aus der Oberfläche σ der in der Richtung der x-Axe fortschreitenden Kugel. Für ein Molecül ξ, η, ζ der Fläche σ_∞ sind daher die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ sämmtlich Null; während für ein Molecül ξ, η, ζ der Fläche σ nur $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ verschwinden, $\frac{d\xi}{dt}$ aber $= \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ ist. Substituirt man diese Werthe in (14.), so erhält man:

(15. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0$, für die Fläche σ_∞,

(15. b) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} \cos(N, x)$, für die Fläche σ,

---

*) Wir führen dabei die Bedingung (I. c) p. 25 hier in derjenigen Gestalt auf, welche ihr in (6.) p. 18 zu Theil geworden ist.

wo das $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ bezeichnet werden kann als die *gemeinschaftliche Geschwindigkeit*, mit welcher alle Molecüle der Kugel in dem betrachteten Zeitaugenblick fortschreiten.

Es handelt sich nun darum, das durch die Bedingungen (13.) und (15. a, b) bestimmte Geschwindigkeitspotential Φ wirklich zu berechnen; was mittelst der Theorie der Kugelfunctionen sich leicht bewerkstelligen lässt.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir unter $\mathfrak{x}$ die x-Coordinate des Kugel*mittelpunctes* verstehen, und überdiess die x-Axe von solcher Lage uns vorstellen, dass dieser Punct gerade auf der x-Axe liegt, und längs derselben fortschreitet. Ueberdiess mag der Kugel*radius* R heissen. Alsdann ergiebt sich mittelst der genannten Theorie für das Geschwindigkeitspotential Φ an irgend einer Stelle (x, y, z) der Flüssigkeit folgender Werth:

$$(16.)\qquad \Phi = -\frac{R^3}{2}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{\cos(r, x)}{r^2},$$

wo r die Länge und Richtung einer vom Kugelmittelpunct nach (x, y, z) laufenden Linie bezeichnet.

Der Kürze willen werde ich die eigentliche Ableitung der Formel (16.) hier nicht mittheilen. Vielmehr werde ich mich darauf beschränken, die Richtigkeit derselben nachträglich zu verificiren, nämlich zu zeigen, dass sie den zu erfüllenden Bedingungen (13.) und (15. a, b) wirklich Genüge leistet.

Differenzirt man die Formel (16.) nach r, so folgt:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial r} = R^3\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{\cos(r, x)}{r^3}.$$

Dieser Differentialquotient hat daher auf der Kugeloberfläche σ, d. i. für $r = R$ den Werth:

$$(\beta.)\qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\cos(r, x).$$

Und diese letzte Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\cos(\nu, x), \quad \text{auf } \sigma;$$

wo ν die auf σ errichtete, in die Flüssigkeit hineinlaufende Normale vorstellt. Endlich kann man auf beiden Seiten der Formel die Normale ν mit der entgegengesetzten (der Flüssigkeit abgewendeten) Normale N vertauschen; und erhält alsdann die zu beweisende Formel (15. b).

Man kann nun ferner den Werth von Φ (16.) auch so schreiben:

$$(\delta.)\qquad \Phi = -\frac{R^3}{2}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{x-\mathfrak{x}}{r^3};$$

woraus folgt:

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{R^3}{2}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\left(3\frac{(x-\mathfrak{x})^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right), \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{R^3}{2}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,3\,\frac{(x-\mathfrak{x})\,y}{r^5}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{R^3}{2}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,3\,\frac{(x-\mathfrak{x})\,z}{r^5}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ für $r = \infty$ verschwinden, dass mithin der zu beweisenden Gleichung (15. a) ebenfalls entsprochen wird.

Endlich ergiebt sich aus (ε.) leicht, dass die Function Φ auch den Bedingungen (13.) Genüge leistet. *Q. e. d.*

Beiläufige Bemerkung. — Denkt man sich im Kugelmittelpunct einen kleinen Magneten, dessen Axe mit der x-Axe zusammenfällt, so wird dieser Magnet auf einen an der Stelle (x, y, z) befindlichen Magnetpol eine Kraft ausüben, deren Componenten, bis auf einen constanten Factor, identisch sind mit den in (x, y, z) vorhandenen Geschwindigkeitscomponenten u, v, w. Solches ergiebt sich leicht aus den Formeln (δ.) und (ε.).

Nachdem Φ gefunden ist, ergiebt sich jetzt die *lebendige Kraft* T der Flüssigkeit mittelst der Formel:

$$(17.)\qquad T = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi)\, dx\,dy\,dz, \quad [\text{vgl. (2.) p. 44}],$$

einer Formel, die auch so geschrieben werden kann:

$$(18.)\qquad T = \frac{\varrho}{2}\left(\iint \Phi\,\frac{\partial \Phi}{\partial N}\,d\sigma + \iint \Phi\,\frac{\partial \Phi}{\partial N}\,d\sigma_\infty\right), \quad [\text{vgl. } (\gamma.) \text{ p. } 41],$$

die eine Integration ausgedehnt über alle Elemente der Kugeloberfläche σ, die andere über alle Elemente der unendlich fernen Fläche σ_∞. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (15. a, b):

$$(19.)\qquad T = \frac{\varrho}{2}\iint \Phi\left(-\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\cos(R, x)\right)d\sigma,$$

also durch Substitution des Werthes (16.)

$$(20.)\qquad T = \frac{\varrho R}{4}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 \iint \cos^2(R, x)\, d\sigma,$$

oder, weil das hier auftretende Integral (wie man leicht findet) $= \frac{4\pi}{3}R^2$ ist:

$$(21.)\qquad T = \frac{\pi\varrho R^3}{3}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2.$$

Und hieraus endlich ergiebt sich durch Vergleich mit der früher angegeben allgemeinen Formel (5.), dass die Constanten Θ_0 und Θ_{11} für den Speciallfall der Kugel folgende sind:

(22.) $$\Theta_0 = 0, \quad \Theta_{11} = \frac{\pi \varrho R^3}{3}.$$

Die in (12.) auftretende Constante $2\Theta_{11}$ ist somit nichts Anderes als die Hälfte derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche im Raume der gegebenen Kugel Platz finden würde. (Vgl. Kirchhoff's Vorl. über Math. Physik, 1876, p. 244.)

§ 23.

Zweiter Fall: Der starre Körper befindet sich innerhalb der Flüssigkeit in Rotation um eine feste Axe.

Dabei mag der Körper von beliebiger Gestalt, und sein Abstand von der festen Drehungsaxe beliebig gross sein; und diese Axe mag identisch sein mit der x-Axe des Coordinatensystems.

Im Uebrigen machen wir dieselben Voraussetzungen wie zu Anfang des vorhergehenden § (p. 77). Was insbesondere die auf den Körper *von Aussen her* einwirkenden Kräfte betrifft, so mag das Drehungsmoment, mit welchem dieselben den Körper um die x-Axe zu drehen bestrebt sind, D genannt werden.

Für die Bewegung des Körpers ergiebt sich alsdann die Differentialgleichung:

(23.) $$\mathsf{M} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = D + D^p,$$

wo ϑ den Drehungswinkel, M das Trägheitsmoment des Körpers, und D^p das Drehungsmoment derjenigen Wirkungen vorstellt, welche auf den Körper ausgeübt werden durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit. Um dieses Drehungsmoment D^p näher zu bestimmen, bedienen wir uns des Princips der lebendigen Kraft:

(24.) $$\frac{d(T+W)}{dt} = -\frac{dL}{dt}, \quad \text{[vgl. p. 37].}$$

Die während der Zeit dt von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübte Arbeit dL hat im gegenwärtigen Fall den Werth:

(25.) $$dL = D^p d\vartheta,$$

wo $d\vartheta$ den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs von ϑ bezeichnet. Ferner ist

(26.) $$T = \Theta_0 + \Theta_{11} \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \quad \text{[vgl. p. 45].}$$

Die hier auftretenden Grössen Θ_0 und Θ_{11} hängen lediglich von ϑ ab, h. h.: Sie hängen lediglich ab von der relativen Lage des betrachteten Körpers zur Kugelfläche σ_∞ (1.) Diese relative Lage aber bleibt, weil jene Fläche unendlich fern ist, *stets dieselbe*. Folglich sind Θ_0 und Θ_{11} *Constanten*. — Endlich ist:

$$W = C - W^j \tag{27.}$$

wo C und W^j dieselben Bedeutungen haben wie früher in (8.). Aus (27.) folgt sofort:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dW^j}{dt} = -\frac{\partial W^j}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = D^j \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{28.}$$

wo alsdann D^j dasjenige Drehungsmoment vorstellt, welches die dem Potential V entsprechenden äusseren Kräfte auf den betrachteten Körper ausüben *würden*, falls seine Materie identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit.

Durch Substitution der Werthe (25.), (26.) und (28.) in die Formel (24.) folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta_0 + \Theta_{11}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right) + D^j \frac{d\vartheta}{dt} = -D^p \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{29.}$$

also weil Θ_0 und Θ_{11} Constanten sind:

$$2\Theta_{11}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -D^j - D^p. \tag{30.}$$

Substituirt man endlich den hieraus für D^p sich ergebenden Werth in (23.), so folgt:

$$(\mathsf{M} + 2\Theta_{11})\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = D - D^j. \tag{31.}$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, welche unter sonst gleichen Umständen für die Bewegung des Körpers im ***leeren Raume*** *sich ergeben würde, d. i. mit der Formel:*

$$\mathsf{M}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = D,$$

so bemerkt man einen doppelten Unterschied.

Einerseits nämlich ist eine dem Princip des Archimedes entsprechende Verminderung des Drehungsmomentes eingetreten, indem D sich in $(D - D^j)$ verwandelt hat. Und andererseits ist ein Zuwachs des Trägheitsmomentes entstanden, indem M in $(\mathsf{M} + 2\Theta_{11})$ sich verwandelt hat.

Dabei sei bemerkt, dass die Constante Θ_{11} stets *positiv* ist, und lediglich abhängt von der Gestalt des gegebenen Körpers; wie solches sich leicht ergiebt mittelst der Formel (4.) p. 45 und mittelst der Formeln $(B_0.)$, $(B_1.)$, $(B_2.)$, etc. p. 39.

Beiläufige Bemerkung. — Wirken von Aussen her *keinerlei* Kräfte ein, ist also $D = 0$, ebenso $V = 0$, mithin auch $D^j = 0$, so folgt aus (31.):

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = 0;$$

so dass also in diesem Fall die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers *constant* sein wird.

Sowohl die Constante Θ_{11}, wie auch die Bewegung der Flüssigkeit lassen sich näher bestimmen in geeigneten speciellen Fällen, so z. B. wenn

der starre Körper eine Kugel ist. Für das Geschwindigkeitspotential Φ ergeben sich alsdann, ebenso wie in (13.), (14.) die Bedingungen:

(32.) $\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ *stetig*, und $\Delta\Phi = 0$, im Raume $\mathfrak{R}$;

(33.) $\frac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = \frac{d\xi}{dt}\cos(\mathsf{N},x) + \frac{d\eta}{dt}\cos(\mathsf{N},y) + \frac{d\zeta}{dt}\cos(\mathsf{N},z)$, an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$.

Auch sind die $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, ebenso wie damals, für die Fläche σ_∞ überall Null, bedürfen aber für die Oberfläche σ der gegebenen Kugel noch einer näheren Untersuchung.

Markirt man innerhalb der Kugel irgend ein Molecül (ξ, η, ζ), und fällt man von hier aus ein Perpendikel λ auf die Drehungsaxe, d. i. auf die x-Axe, und bezeichnet man überdiess den Neigungswinkel dieses Perpendikels gegen die feste xy-Ebene mit ψ, so ist offenbar:

$$\begin{aligned}
\xi &= \text{Const.}, & \frac{d\xi}{dt} &= 0, \\
\eta &= \lambda\cos\psi, & \frac{d\eta}{dt} &= -\lambda\sin\psi\frac{d\psi}{dt}, \\
\zeta &= \lambda\sin\psi, & \frac{d\zeta}{dt} &= +\lambda\cos\psi\frac{d\psi}{dt},
\end{aligned}$$

weil λ *constant* bleibt. Beachtet man nun, dass $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ ist, so ergiebt sich aus diesen Formeln sofort:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= 0, \\
\frac{d\eta}{dt} &= -\zeta\frac{d\mathfrak{s}}{dt}, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= +\eta\frac{d\mathfrak{s}}{dt}.
\end{aligned}$$

Somit folgt aus (33.):

(34. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0$, auf der Fläche σ_∞;

(34. b) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \left(\eta \cos(N, z) - \zeta \cos(N, y)\right) \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$, auf der Fläche σ.

Um die Vorstellung zu fixiren, nehmen wir an, der Kugel*mittelpunct* befinde sich in der yz-Ebene, und beschreibe daselbst um den Anfangspunct des Coordinatensystems einen Kreis vom Radius l. Da es ferner einerlei ist, *welchen Augenblick* der in Rede stehenden Rotationsbewegung wir in Betracht ziehen, so wollen wir der Bequemlichkeit willen *den* Augenblick nehmen, in welchem der Kugelmittelpunct gerade *auf der y-Axe* liegt. In diesem Augenblicke gelten alsdann für die Coordinaten ξ, η, ζ irgend eines Oberflächenelementes $d\sigma$ die Formeln:

$$
(35.)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= R\cos(R, x) &&= -R\cos(N, x),\\
\eta &= R\cos(R, y) + l &&= -R\cos(N, y) + l,\\
\zeta &= R\cos(R, z) &&= -R\cos(N, z),
\end{aligned}
$$

wo R die Lage und Richtung des nach $d\sigma$ laufenden Kugelradius vorstellt, während N die diesem Radius entgegengesetzte Richtung, d. i. die der Flüssigkeit abgewendete Normale bezeichnet. Substituirt man die Werthe η, ζ (35.) in die Formel (34. b), so erhält man sofort:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = l\cos(N, z)\frac{d\mathfrak{s}}{dt};$$

sodass also die beiden Formeln (34. a, b) folgende Gestalt gewinnen:

(36. a) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0$, auf der Fläche σ_∞;

(36. b) $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \left(l\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)\cos(N, z)$, auf der Fläche σ.

Betrachten wir jetzt die zur Bestimmung von Φ erhaltenen Formeln (32.) und (36. a, b) ein wenig genauer, so bemerken wir, dass dieselben mit den *früheren* Formeln (13.) und (15. a, b.) identisch sind, nur mit dem Unterschiede, dass die dermaligen Grössen $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ und $\cos(N, x)$ gegenwärtig durch $l\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ und $\cos(N, z)$ ersetzt sind. An Stelle der damaligen Werthe (16.) und (21.) werden wir daher im gegenwärtigen Fall folgende erhalten:

$$(37.)\qquad \Phi = -\frac{R^3}{2}\left(l\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)\frac{\cos(r, z)}{r^2},$$

$$(38.)\qquad T = \frac{\pi\varrho R^3}{3}\left(l\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2.$$

In dem betrachteten Zeitaugenblick liegt der Kugelmittelpunct auf der y-Axe. Die augenblickliche Geschwindigkeit dieses Mittelpunctes ist daher ihrer Richtung nach dargestellt durch eine vom Mittelpunct aus parallel zur z-Axe fortlaufende Linie z'. Substituirt man diese Linie z' an Stelle von z in der Formel (37.), so erhält man:

$$\Phi = -\frac{R^3}{2}\left(l\,\frac{d\vartheta}{dt}\right)\frac{\cos(r, z')}{r^2}. \tag{39.}$$

Dies also ist der Werth von Φ an einer beliebigen Stelle (x, y, z) der gegebenen Flüssigkeit. Dabei bezeichnet r den Abstand dieser Stelle (x, y, z) vom Kugelmittelpunct, und (r, z') den Neigungswinkel von r gegen die augenblickliche Bewegungsrichtung z' des Kugelmittelpunctes. Somit folgt aus der vorstehenden Formel (39.) sofort, *dass die an allen Stellen der Flüssigkeit vorhandenen Werthe von Φ symmetrisch sind in Bezug auf jene Linie z'.*

Ja noch mehr. Beachtet man, dass in (39.) das Product $l\,\frac{d\vartheta}{dt}$ die *Grösse*, und z' die *Richtung* der augenblicklichen Geschwindigkeit des Kugelmittelpunctes vorstellen, und vergleicht man sodann diese Formel (39.) mit der früherern (16.), so gelangt man zu folgendem durch Einfachheit ausgezeichneten Satze:

Befindet sich im Innern der Flüssigkeit eine Kugel, welche in gleichförmiger oder ungleichförmiger Rotation begriffen ist um eine gegebene feste Axe, und bezeichnet man in irgend einem Zeitaugenblick t die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunctes ihrer Grösse und Richtung nach mit $\mathfrak{W}$, so werden für diesen Augenblick die Werthe des Geschwindigkeitspotentials Φ, und folglich auch die Bewegung der Flüssigkeit von genau derselben Beschaffenheit sein, als hätten in diesem Augenblicke sämmtliche Molecüle der Kugel jene mit $\mathfrak{W}$ bezeichnete Geschwindigkeit.

Die durch die gegebene Rotationsbewegung der Kugel hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit ist mithin für jeden einzelnen Zeitaugenblick von solcher Beschaffenheit, als wäre sie hervorgerufen durch eine gewisse blos fortschreitende Bewegung der Kugel.

Hiemit aber ist die in § 21 (p. 76) aufgeworfene Frage beantwortet. Auf Grund gewisser allgemeiner Ueberlegungen sprachen wir damals den Satz aus: *Das Wasser in einem Glase kann, falls dasselbe zu Anfang in Ruhe, mithin wirbelfrei ist, durch Umrühren mit einem Stabe niemals in eine wirbelnde (d. i. mit Wirbeln behaftete) Bewegung gerathen, — vorausgesetzt, dass die Reibung als Null betrachtet werden soll.* Und dieser Satz wird uns nach Absolvirung des soeben behandelten Beispieles nicht mehr wunderbar erscheinen.

Vergleicht man schliesslich noch die Formel (38.) mit der allgemeinen Formel (26.), so sieht man, dass die Constanten Θ_0 und Θ_{11} für den *speciellen Fall der Kugel* folgende sind:

$$(40.) \qquad \Theta_0 = 0, \qquad \Theta_{11} = \frac{\pi \varrho R^3}{3} l^2,$$

wo l den Abstand des Kugelmittelpunctes von der festen Drehungsaxe bezeichnet. Nun machte sich [vergl. (31.)] bei der Bewegung des Körpers resp. der Kugel *im Innern der Flüssigkeit* an Stelle des eigentlichen Trägheitsmomentes M ein etwas grösseres Trägheitsmoment geltend, vom Werthe $(\mathsf{M} + 2\Theta_{11})$, also nach (40.) vom Werthe $\left(\mathsf{M} + \frac{2\pi\varrho R^3}{3} l^2\right)$. Dieses grössere Trägheitsmoment kann somit bezeichnet werden als dasjenige, in welches M sich verwandelt, sobald man im Kugelmittelpunct noch einen Massenpunct hinzufügt, dessen Masse halb so gross ist als die im Raume der Kugel Platz findende Flüssigkeitsmasse.

§ 24.

Beiläufige Betrachtungen.

Die Flüssigkeit sei äusserlich wieder begrenzt von der festaufgestellten Fläche σ_∞ (1.). Im Innern der Flüssigkeit mögen zwei *starre Revolutionskörper* $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ vorhanden sein, deren geometrische Axen auf der x-Axe des Coordinatensystems liegen, und längs dieser nach Belieben fortschreiten können. Auch mag der Einfachheit willen vorausgesetzt sein, dass die beiden Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ neben der eben genannten fortschreitenden Bewegung keine drehende Bewegung anzunehmen im Stande sind. Die Körper können Kugeln oder Revolutionsellipsoide, aber z. B. auch *Ringe* sein.

Auf das aus der Flüssigkeit und den Körpern $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ bestehende System mögen von Aussen her *keinerlei* Kräfte einwirken, sodass z. B. $V = 0$ ist. Der Anfangszustand des Systems sei beliebig gegeben, jedoch *symmetrisch zur x-Axe*; und insbesondere sei der Anfangszustand der Flüssigkeit ein *wirbelfreier* (vgl. übrigens die Bemerkung p. 77).

Wir stellen uns nun die Aufgabe, *die Bewegung der beiden Körper* im weiteren Verlaufe der Zeit näher zu untersuchen, und namentlich auch die *Resultanten* derjenigen Druckkräfte zu bestimmen, welche in irgend einem Augenblick t auf die Körper ausgeübt werden von der umgebenden Flüssigkeit. Diese Resultanten fallen offenbar (wie aus der Symmetrie unserer Annahme folgt) in die Linie der x-Axe, und mögen demgemäss mit X_1^p und X_2^p bezeichnet sein.

Markirt man irgendwo im Innern von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei bestimmte Puncte (etwa die Schwerpuncte der beiden Körper), bezeichnet man ferner die x-Coordinaten dieser Puncte mit $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, und die Massen der Körper selber mit M_1 und M_2, so ergeben sich (weil äussere Kräfte nicht vorhanden sein sollen) die Differentialgleichungen:

$$(41.) \qquad M_1 \frac{d^2\mathfrak{x}_1}{dt^2} = X_1^p \quad \text{und} \quad M_2 \frac{d^2\mathfrak{x}_2}{dt^2} = X_2^p.$$

Zur Bestimmung von X_1^p und X_2^p benutzen wir das *Princip der lebendigen Kraft:* $d(T + W) = - dL$; vgl. p. 37. Dieses Princip nimmt im gegenwärtigen Fall, wo $V = 0$, mithin auch $W = 0$ ist, die Gestalt an:

$$(42.) \qquad \frac{dT}{dt} = - \frac{dL}{dt},$$

oder, falls man für dL seinen Werth substituirt, die Gestalt:

$$(43.) \qquad \frac{dT}{dt} = - \left(X_1^p \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} + X_2^p \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt} \right).$$

Wir wollen jetzt das Princip der lebendigen Kraft zum *zweiten Mal* in Anwendung bringen, und zwar diesmal auf das *ganze* (aus der Flüssigkeit und den Körpern $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ bestehende) *System.* Da auf dieses System von Aussen her keinerlei Kräfte influiren, so muss nach dem genannten Princip *die lebendige Kraft des Systems fortdauernd constant bleiben,* also die Formel gelten:

$$(44.) \qquad T + \frac{M_1}{2} \left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} \right)^2 + \frac{M_2}{2} \left(\frac{d\mathfrak{x}_2}{dt} \right)^2 = \text{Const.}$$

Nimmt man nun an, die Dichtigkeiten der beiden Körper seien *verschwindend klein,* mithin ihre Massen M_1 und M_2 ebenfalls *verschwindend* klein, gleich *Null,* so ergiebt sich aus (44.): $T = \text{Const.}$, folglich aus (43.):

$$X_1^p \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} + X_2^p \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$X_1^p : X_2^p = \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt} : - \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}.$$

Also der Satz: *Sind die Dichtigkeiten der Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ verschwindend klein, so werden die Resultanten X_1^p und X_2^p der auf die Körper ausgeübten Druckkräfte in jedem Augenblick umgekehrt proportional sein mit den Geschwindigkeiten der beiden Körper, abgesehen vom Vorzeichen.* Aber dieser Satz ist *unrichtig.* Und die Ableitung der beiden letzten Formeln zeigt eben nur, wie leicht man bei der Operation mit unendlich kleinen Massen in Irrthümer verfallen kann.

Die Formeln (41.), (42.), (43.), (44.) sind **unanfechtbar**. **Aus** der Formel (44.) aber folgt bei strenger Behandlungsweise:

$$(45.)\qquad \frac{dT}{dt} = -\left(M_1 \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}_1}{dt^2} + M_2 \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}_2}{dt^2}\right).$$

Diess mit (43.) combinirt, erhält man:

$$(46.)\qquad M_1 \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\left(\frac{d^2\mathfrak{x}_1}{dt^2} - X_1^p\right) + M_2 \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt}\left(\frac{d^2\mathfrak{x}_2}{dt^2} - X_2^p\right) = 0.$$

Diese letzte Formel (46.) reducirt sich aber, mittelst (41.), auf die *identische* Gleichung $0 = 0$, und giebt also über die gesuchten Kräfte X_1^p und X_2^p *keinerlei Auskunft.*

§ 25.

Fortsetzung. Einschränkung auf einen specielleren Fall.

Wir wollen annehmen, die Beschaffenheit und der Anfangszustand des ganzen Systems seien *symmetrisch zur yz-Ebene.* Diese Symmetrie wird alsdann im weiteren Verlauf der Bewegung *fortdauernd* vorhanden sein; sodass also z. B. fortdauernd

$$(\alpha.)\qquad X_1^p = -X_2^p \quad \text{und} \quad d\mathfrak{x}_1 = -d\mathfrak{x}_2,$$

mithin:

$$(\beta.)\qquad X_1^p d\mathfrak{x}_1 = X_2^p d\mathfrak{x}_2$$

sein wird.

Auch folgt aus dieser Symmetrie, dass die zu Anfang in der yz-Ebene befindlichen Flüssigkeitstheilchen fortdauernd in dieser Ebene bleiben. Demgemäss figurirt diese Ebene gewissermassen als eine *feste Wand,* auf welcher die betreffenden Theilchen fortdauernd zu verharren gezwungen sind. Und demgemäss können wir unsere Betrachtung beschränken auf die *eine Hälfte* der gegebenen Flüssigkeit, etwa auf diejenige, welche auf der *positiven* Seite der yz-Ebene liegt, indem wir diese Hälfte uns äusserlich begrenzt vorstellen theils von der yz-Ebene selber, theils von dem betreffenden Theil der Fläche σ_∞ (1.).

Derjenige der beiden Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, der in dieser Flüssigkeitshälfte enthalten ist, mag schlechtweg mit $\mathfrak{K}$ (ohne Index) bezeichnet sein. Für denselben ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$(47.)\qquad M\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X^p, \qquad \text{[vgl. (41.)].}$$

Ferner erhält man nach dem Princip der lebendigen Kraft: $dT = -dL$, wo T die lebendige Kraft der betrachteten Flüssigkeits*hälfte*, und dL

die von dieser Flüssigkeit auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübte Arbeit vorstellen. Diese Formel $dT = -dL$ nimmt, falls man für dL seinen Werth substituirt, die Gestalt an:

$$\frac{dT}{dt} = -X^p \frac{d\mathfrak{x}}{dt}. \tag{48.}$$

Die lebendige Kraft T hat aber den Werth:

$$T = \Theta_0 + \Theta_{11} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 \qquad \text{[vgl. (3.) p. 45];} \tag{49.}$$

wo Θ_0 und Θ_{11} *Functionen von* $\mathfrak{x}$ *sind**). Substituirt man diesen Werth (49.) in (48.), so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta_0 + \Theta_{11}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2\right) = -X^p \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \tag{50.}$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial\mathfrak{x}} + \frac{\partial\Theta_{11}}{\partial\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2\Theta_{11}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -X^p. \tag{51.}$$

Substituirt man den Werth der Kraft X^p (51.) in die Differentialgleichung (47.), so folgt:

$$(M + 2\Theta_{11})\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -\frac{\partial\Theta_0}{\partial\mathfrak{x}} - \frac{\partial\Theta_{11}}{\partial\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2. \tag{52.}$$

Ist nun, wie wir annehmen wollen, der Raum des Körpers $\mathfrak{K}$ *einfach* zusammenhängend (was z. B. der Fall sein wird, wenn der Körper eine Kugel oder ein Ellipsoid), und gilt mithin Gleiches auch von dem Raume $\mathfrak{R}$ der Flüssigkeit, so *verschwindet* das Θ_0 (vgl. den Zusatz p. 64); wodurch die Gleichung (52.) die einfachere Gestalt erhält:

$$(M + 2\Theta_{11})\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -\frac{\partial\Theta_{11}}{\partial\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2. \tag{53.}$$

Diese Gleichung aber kann man, wenn die Geschwindigkeit des Körpers, d. i. der Quotient $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ mit $\mathfrak{U}$ bezeichnet wird, auch so schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{U}}\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = -\frac{\partial \log\sqrt{M + 2\Theta_{11}}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \tag{54.}$$

oder auch so:

$$\frac{d\log\mathfrak{U}}{dt} = -\frac{d\log\sqrt{M + 2\Theta_{11}}}{dt}. \tag{55.}$$

---

*) Bei der Betrachtung auf p. 78 waren Θ_0 und Θ_{11} *Constante*. Das ist offenbar gegenwärtig *nicht* mehr der Fall, weil die relative Lage des Körpers $\mathfrak{K}$ zur Umgrenzung der betrachteten Flüssigkeits*hälfte* bei der Bewegung des Körpers von Augenblick zu Augenblick eine andere wird.

Hieraus folgt durch Integration:

$$\log \mathfrak{U} = \log C - \log \sqrt{M + 2\Theta_{11}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{U} = \frac{C}{\sqrt{M + 2\Theta_{11}}}, \tag{56.}$$

wo C eine durch den Anfangszustand sich bestimmende *Integrations-Constante* vorstellt.

Ueber die Bewegung einer Kugel im Innern einer Flüssigkeit, welche auf einer Seite von einer festen Ebene begrenzt ist, nach allen übrigen Seiten aber ins Unendliche sich ausdehnt.

§ 1.

Vorläufige Bemerkungen.

Im Jahre 1839 publicirte *Lamé* im vierten Bande des Liouville-schen Journals seine Untersuchungen *sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux,* — eine Arbeit, welche im Gebiete der Mathematik und mathematischen Physik wohl zu den glänzendsten Leistungen unseres Jahrhunderts zählen dürfte. Diese Arbeit, in welcher zum ersten Mal die Parameter eines orthogonalen Flächensystems als Coordinaten benutzt sind*), musste fast von selber zu ähnlichen Versuchen anregen, und den Gedanken nahe legen, dass die dort exponirten Methoden bei geeigneter Abänderung vielleicht auch anwendbar sein könnten auf *andere* orthogonale Flächensysteme, z. B. auf dasjenige, welches durch Umdrehung eines *orthogonalen Kreissystemes,* unter Hinzunahme der betreffenden Meridianebenen, sich ergiebt.

Als ich etwa im Jahre 1858 derartige Ueberlegungen mit einiger Beharrlichkeit zu verfolgen begann, und dabei auf mancherlei Schwierigkeiten stiess, beschloss ich, das unbekannte Terrain zuerst durch Untersuchungen, die in *paralleler Richtung* fortgehen, und *weniger* Schwierigkeiten darbieten, näher zu recognosciren. Auf diese Weise entstanden meine Untersuchungen über die *analogen Probleme der Ebene* (*resp. über das logarithmische Potential*), welche zuerst die *confocalen Kegelschnitte*, sodann die *orthogonalen Kreise*, später *gewisse Curven vierter Ordnung* etc. betrafen, und schliesslich zu gewissen allgemeinen Be-

---

*) *Jacobi* hat in dieser Beziehung die Priorität *Lamé*'s ausdrücklich hervorgehoben. Man vgl. Jacobi's gesammelte Werke, 1882, Bd. II, p. 63.

trachtungen und *allgemeinen Sätzen* mich hinleiteten. Von all' diesen Arbeiten habe ich allerdings nur den zuletzt genannten *allgemeinen* Theil publicirt, übrigens auch diesen nicht einmal vollständig, im Jahre 1861, unter dem Titel: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, Crelles Journal, Bd. 59. p. 335.

Uebrigens habe ich jene *specielleren* und nicht publicirten Theile meiner damaligen Arbeit, jene Theile, die über confocale Kegelschnitte, orthogonale Kreise u. s. w. handelten, mehrfach zum Gegenstande meiner Vorlesungen und Seminaraufgaben gemacht. Auch hat einer meiner Schüler, Herr Oberlehrer Dr. *Meutzner* auf meine besondere Veranlassung den über *Kegelschnitte* handelnden Theil in selbstständiger Weise ausgeführt, und die Ergebnisse seiner Untersuchungen in den Mathem. Annalen, Bd. 8, veröffentlicht.

Während dieser Vorarbeiten, bei denen ich, durch mehrere in jene Zeit fallende Publicationen *Lamé*'s*), sowie auch durch einige Bemerkungen in dem bekannten *Briot-Bouquet*'schen Werke**), einigermassen unterstützt wurde, behielt ich mein eigentliches Ziel, nämlich die *Behandlung orthogonaler Flächensysteme*, und in erster Linie die *Behandlung der dem orthogonalen Kreissystem entsprechenden Rotationsflächen* fortdauernd im Auge. Es eröffneten sich mir dabei im Verlauf meiner fortgesetzten Bemühung, wie solches wohl häufig bei der Behandlung schwieriger Themata der Fall sein wird, allmählig *zwei* Wege, von denen ich alternirend bald den einen bald den andern benutzen konnte, um jedesmal eine kleine Strecke vorwärts zu kommen. Später, bei meiner schliesslichen Publication über diesen Gegenstand, im Jahre 1862, habe ich dann, der bessern Uebersichtlichkeit willen, diese beiden Wege von einander getrennt, den einen *nach* dem andern mitgetheilt, und den einen als „geometrische", den andern als „analytische" Methode bezeichnet. Das Werk selber dürfte deutlich zeigen, wie ich dabei allmählich zur Construction gewisser *geometrischer Punctreihen* hingeführt wurde, die ich damals als *conjugirte* Puncte bezeichnete. Uebrigens betrachtete ich das Werk, seiner ganzen Entstehung nach, als eine Arbeit, welche sich an jene zu Anfang genannte Lamé'sche Untersuchung in bescheidener Weise anlehnt. Demgemäss wurde dasselbe von mir betitelt als handelnd *über den stationären Temperatur-*

---

*) *Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes.* Paris 1859. Und ferner: *Lamé: Leçons sur la théorie analytique de la Chaleur.* Paris 1861.

**) *Briot et Bouquet: Théorie des fontions doublement périodiques.* Paris 1859.

zustand in einem von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzten Körper; Halle bei Schmidt, 1862*).

Unmittelbar im Gange meiner Betrachtungen lag es nun auch, jenes orthogonale Kreissystem um eine *zweite*, gegen die früher gewählte Umdrehungsaxe senkrecht stehende Axe rotiren zu lassen, und die alsdann entstehenden *ringförmigen Flächen* der entsprechenden Behandlungsweise zu unterwerfen. Dies ist in der That von mir ausgeführt worden in meinem Werk *über die Wärme- und Elektricitätsvertheilung in einem Ringe,* Halle, Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses, 1864.

Dass all' diese Untersuchungen unmittelbar übertragbar seien auf die Theorie der *Elektrostatik,* bedurfte für den Sachverständigen kaum noch einer weiteren Bemerkung. Zum Ueberfluss habe ich übrigens in der Einleitung des Werkes von 1862 (über die excentrischen Kugelflächen) noch speciell exponirt**), *in welcher Weise* diese Untersuchungen auf die Elektrostatik übertragbar sind, und insbesondere darauf hingewiesen, dass man mittelst meiner Methode von Neuem hingelangen kann zur Lösung der schon von *Poisson* behandelten Aufgabe über die elektrische Vertheilung in zwei Kugeln. Zugleich habe ich dort bemerkt, dass meine Methode, der Poisson'schen gegenüber, den Vorzug der grösseren *Einfachheit* und zugleich auch den der grösseren *Allgemeinheit* besitzt, insofern als sie auch dann noch zum Ziele führt, wenn die Kugeln dem Einfluss gegebener *äusserer* Kräfte ausgesetzt sind, was bei der Poisson'schen Methode *nicht* der Fall ist.

Von *berufener* und *unberufener* Seite ist Mancherlei gegen meine Arbeiten eingewendet worden. So wurde mir z. B., jedenfalls von *letzterer* Seite, der Vorwurf gemacht, dass mein Werk (von 1862, über die excentrischen Kugeln) ziemlich überflüssig sei, weil der Gegenstand ja bereits von *Poisson* absolvirt wäre. Dass meine Methode eine völlig *andere*, eine wesentlich neue sei, und dass sie der Poisson'schen gegenüber den Vorzug habe, auch bei Vorhandensein *äusserer* Kräfte anwendbar zu sein, — das schien der Betreffende nicht zu wissen.

Von *berufener*, nämlich sachverständiger Seite her, bin ich dagegen darauf aufmerksam gemacht worden, dass die eigentlichen *Principien*

---

*) Als zugehörig zu diesem Werk ist noch zu erwähnen: erstens eine kurz vorher von mir publicirte Schrift *über den stationären Temperaturzustand einer Kugel,* Halle bei Schmidt, 1861, und ferner ein Aufsatz im 62. Bande des Crelle'schen Journal, *über das Gleichgewicht der Wärme und Elektricität in einem von zwei excentrischen Kugelflächen begrenzten Körper,* 1862.

**) Ebenso auch im Crelle'schen Journal, Bd. 62, p. 36—49.

meiner Methoden nämlich die Einführung der *conjugirten Puncte* und andererseits die Einführung der *dipolaren Coordinaten* schon in den *Thomson*'schen Aufsätzen von 1845—1853 sich vorfinden. Man hätte hinzufügen können, dass die *erstere* der genannten Ideen auch schon in einer Vorlesung meines Vaters vom Wintersemester 1857/58 enthalten ist.

Dem gegenüber kann ich nur bemerken, dass ich ohne die mindeste Kenntniss dieser theils durch Druck, theils durch Vorlesungen erfolgten Publicationen zu meinen Methoden gelangt bin. So z. B. ist mir die genannte Vorlesung meines Vaters erst vor einigen Monaten durch das von einem der damaligen Zuhörer *O. E. Meyer* (jetzt Professor in Breslau) ausgearbeitete Vorlesungsheft bekannt geworden. — Selbstverständlich habe ich die Priorität der genannten Autoren ohne Weiteres anzuerkennen, und demgemäss auf die Originalität eines grossen Theils meines Werkes Verzicht zu leisten.

Trotzdem dürfte in meinem Werke (von 1862, über die excentrischen Kugelflächen) Mancherlei enthalten sein, was von den früheren Autoren niemals berührt worden ist, so z. B. die Bestimmung der elektrischen Vertheilung auf zwei Kugeln auch für *den* Fall, dass dieselben der Wirkung *äusserer* Kräfte ausgesetzt sind, ferner die *ausgezeichnet einfache* Gestalt, welche die Theorie der conjugirten Puncte bei gleichzeitiger Anwendung der dipolaren Coordinaten gewinnt*), ferner der Uebergang von den *dipolaren* zu den *synpolaren* Coordinaten, und hiemit Hand in Hand gehend der Uebergang von den *Kugelfunctionen* zu den *Bessel'schen Functionen*, endlich die Entdeckung einer Formel, mittelst deren eine willkührliche Function zweier Argumente darstellbar ist, durch *ein nach den Bessel'schen Functionen fortschreitendes Integral.*

Ein genaueres Urtheil über die Frage, welches Verdienst in diesen Dingen Thomson, welches meinem Vater, und welches endlich mir einzuräumen sei, wird sich übrigens Jedermann selbst zu bilden im Stande sein. Denn die Publicationen Thomson's und die meinigen liegen ja im Druck vor, und die betreffende Vorlesung meines Vaters wird jedenfalls in einiger Zeit ebenfalls im Druck erscheinen. Und als Verdienst wird doch schliesslich jedem Autor immer nur *das* anzurechnen sein, was derselbe dem schon vorhandenen Bestand, mag dieser nun durch Druck oder durch öffentlichen Vortrag begründet gewesen sein, *neu* hinzugefügt hat.

Bei den hier vorliegenden hydrodynamischen Untersuchungen habe ich das Instrument der *dipolaren Coordinaten* und das der *conjugirten*

---

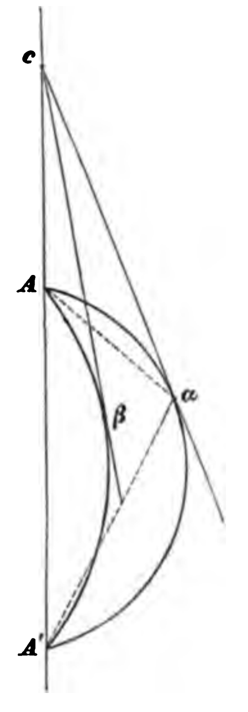
*) Diese einfache Gestalt, welche die Theorie der conjugirten Puncte durch Einführung der dipolaren Coordinaten gewinnt, drückt sich der Hauptsache nach durch *vier Sätze* aus, die im gegenwärtigen Werk im dritten § des *nächstfolgenden* Abschnitts von Neuem wiederholt werden sollen. Genau dieselben vier Sätze sind einige Jahre später übrigens auch von *Betti* publicirt worden.

oder *Spiegel-Puncte* von Neuem zu benutzen. Da die betreffenden Formeln im Allgemeinen wenig bekannt sind, so sehe ich mich genöthigt, dieselben hier, insoweit als solches für den vorliegenden Zweck erforderlich ist, von Neuem zu entwickeln. Und hiebei werde ich nicht eine blosse Recapitulation aus meinem Werke (von 1862) liefern, sondern vielmehr den Gegenstand in *möglichst verbesserter Form* vorzuführen mich bemühen, in derjenigen Form, welche derselbe nach mancher darüber gehaltenen Vorlesung schliesslich bei mir angenommen hat. Auch werde ich bei den wichtigeren Sätzen und Formeln den jedesmaligen Autor namhaft zu machen suchen, und bitte dabei mich corrigiren zu wollen, falls mir dies nicht überall gelungen sein sollte.

§ 2.

Einführung der dipolaren Coordinaten.

Es sei gegeben ein System von *Kreisbogen*, welche die vertikale Linie AA' zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Markirt man auf der Verlängerung von AA' einen Punct c, legt man ferner von c aus Tangenten an jene Kreisbogen, und bezeichnet man die Berührungspuncte dieser Tangenten mit α, β, γ, etc., so ist (zufolge des Tangenten-Secanten-Satzes) z. B.:



(1. α) $$(c\alpha)^2 = (cA)\,(cA').$$

Ebenso ergiebt sich:

(1. β) $$(c\beta)^2 = (cA)\,(cA');$$

u. s. w. Somit folgt:

(2.) $$(c\alpha) = (c\beta) = (c\gamma) = \text{etc. etc.}$$

Demgemäss befinden sich all' jene Berührungspuncte α, β, γ, etc. auf einer um c beschriebenen *Kreisperipherie*, welche zugleich die Eigenschaft hat, die zu Anfang genannten, über AA' stehenden *Kreisbogen* orthogonal zu durchschneiden. — Giebt man jetzt dem Puncte c auf der Verlängerung von AA' irgend welche andere Lage, so erhält man in analoger Weise eine *zweite Kreisperipherie*, die wiederum jene *Bogen* orthogonal schneidet. U. s. w. U. s. w.

In solcher Weise erhält man, ausgehend von den beiden festen Puncten A, A', welche fortan die beiden *Pole* heissen mögen, zwei zu einander orthogonale Curvensysteme, von denen das

eine das *System der Bogen*, das andere das *System der Kreise* genannt werden mag. Lässt man die ganze Figur um die vertikale Linie AA' sich drehen, so erzeugen jene Bogen ein System von Rotationsflächen, von denen jede in A und A' nach Art eines Kegels gestaltet ist. Demgemäss mögen diese Rotationsflächen weiterhin als *Conoidflächen* bezeichnet werden. Andrerseits erzeugen die Kreise, bei einer solchen Drehung der Figur, ein System von *Kugelflächen*, deren Centra sämmtlich auf der Linie AA', oder vielmehr auf der Verlängerung derselben sich befinden.

Der Parameter der *Conoidflächen* mag ω, und derjenige der *Kugelflächen* ϑ heissen. Hinsichtlich der Definition dieser Parameter sei Folgendes bemerkt:

Der Peripheriewinkel $A\alpha A'$ ist offenbar für sämmtliche Puncte α einer gegebenen Conoidfläche *ein und derselbe*; (vergl. die Figur p. 99). Dieser Winkel soll der *Parameter* der Conoidfläche genannt, und mit ω bezeichnet werden. Demgemäss ergeben sich der Reihe nach *sämmtliche* Conoidflächen, wenn man diesen Parameter ω variiren lässt zwischen den Grenzen:

(3.) $$\omega = 0 \cdots\cdots \pi.$$

So z. B. erhält man für $\omega = \pi$ ein unendlich dünnes Conoid, welches dargestellt ist durch die gerade Linie AA'. Ferner wird das Conoid für $\omega = \frac{\pi}{2}$ eine Kugelfläche sein. Endlich wird dasselbe für $\omega = 0$ wiederum unendlich dünn, nämlich durch die beiden Verlängerungen der Linie AA' dargestellt sein.

Was ferner den Parameter der *Kugelflächen* betrifft, so ist nach (1. α):

$$(c\alpha)^2 = (cA)\,(cA'),$$

mithin:

$$(cA') : (c\alpha) = (c\alpha) : (cA),$$

und folglich:

$$\Delta\,(cA'\alpha) \backsim \Delta\,(c\alpha A).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt die Proportionalität ihrer Seiten, d. i. die Formel:

$$\frac{(A'\alpha)}{(\alpha A)} = \frac{(cA')}{(c\alpha)} = \frac{(c\alpha)}{(cA)}.\text{*)}$$

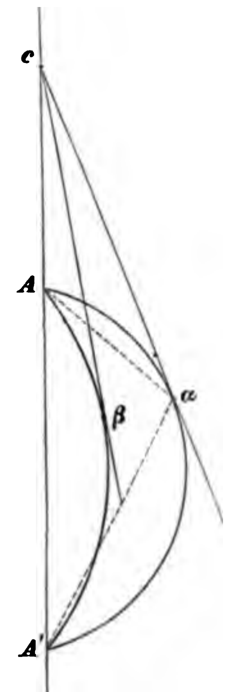
*) Es sei bemerkt, dass ich die gegenseitige *Entfernung* zweier Puncte p, q stets als *positiv* betrachte, und dieselbe nach Belieben bald mit (pq), bald mit (qp) bezeichne.

Ist nun $u = v = w$, so ist auch $u = \sqrt{vw}$. Und demgemäss kann die letzte Formel auch so geschrieben werden:

$$(4.\ \alpha)\qquad \frac{(\alpha A')}{(\alpha A)} = \sqrt{\frac{(c A')}{(c A)}}.$$

In analoger Weise wird man offenbar für den Punct β folgende Formel finden:

$$(4.\ \beta)\qquad \frac{(\beta A')}{(\beta A)} = \sqrt{\frac{(c A')}{(c A)}}.$$



U. s. w. U. s. w. — Diese Formeln (4. α, β, etc.) zeigen, dass der Quotient $\frac{(\alpha A')}{(\alpha A)}$ für *sämmtliche* Puncte α der um c beschriebenen Kugelfläche *ein und denselben* Werth besitzt. Und demgemäss mag dieser Quotient, oder besser der natürliche Logarithmus dieses Quotienten als der *Parameter* jener Kugelfläche festgesetzt, und mit ϑ bezeichnet werden.

Mit andern Worten: Betrachtet man irgend eine der von uns construirten Kugelflächen, und nennt man ϱ und ϱ' die beiden Abstände, welche ein variabler Punct dieser Fläche von den beiden Polen A und A' besitzt, so hat der Quotient $\frac{\varrho'}{\varrho}$ stets *ein und denselben Werth*, welche Lage man jenem variablen Punct auf der betrachteten Kugelfläche auch zu Theil werden lassen mag. Der natürliche Logarithmus dieses Werthes soll der *Parameter* der Kugelfläche genannt, und mit ϑ bezeichnet werden. Also:

$$(5.)\qquad \log\frac{\varrho'}{\varrho} = \vartheta,\quad \text{d. i.}\ \frac{\varrho'}{\varrho} = e^{\vartheta}.$$

Demgemäss ergeben sich *sämmtliche* Kugelflächen unseres Systems, wenn man den Quotienten $\frac{\varrho'}{\varrho}$ zwischen den Grenzen $0 \cdots\cdots \infty$, oder (was dasselbe) den Parameter ϑ zwischen den Grenzen

$$(6.)\qquad \vartheta = -\infty \cdots\cdots + \infty$$

variiren lässt.

Für $\vartheta = 0$, d. i. $\frac{\varrho'}{\varrho} = 1$, d. i. $\varrho = \varrho'$ erhält man eine unendlich grosse Kugelfläche, nämlich die durch die Mitte der vertikalen Linie

AA' hindurchgehende Horizontalebene. Für $\vartheta = +\infty$, d. i. $\frac{\varrho'}{\varrho} = \infty$, d. i. $\varrho = 0$ erhält man diejenige unendlich kleine Kugelfläche, welche identisch ist mit dem Pole A. Und für $\vartheta = -\infty$, d. i. $\frac{\varrho'}{\varrho} = 0$, d. i. $\varrho' = 0$ erhält man wiederum eine unendlich kleine Kugelfläche, nämlich den Pol A'.

Wir führen ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen x-Axe dargestellt sein mag durch die *vertikal nach Oben* laufende Linie $A'A$, und dessen yz-Ebene identisch sein soll mit der durch die Mitte von $A'A$ gehenden *Horizontalebene*. Sämmtliche Kugelflächen unseres Systems zerfallen alsdann, je nachdem ihr Parameter ϑ positiv oder negativ ist, in zwei Kategorien. Diejenigen mit *positivem* Parameter liegen *oberhalb* der yz-Ebene, und umschliessen den Pol A. Die erste derselben ($\vartheta = 0$) ist die yz-Ebene selber, und die letzte derselben ($\vartheta = +\infty$) der Pol A. Andererseits liegen die Kugelflächen mit *negativem* Parameter sämmtlich *unterhalb* der yz-Ebene, und umschliessen den Pol A'. Die erste derselben ($\vartheta = 0$) ist wiederum die yz-Ebene selber, und die letzte derselben ($\vartheta = -\infty$) der Pol A'. Auch bemerkt man, dass je zwei Kugelflächen, deren Parameter *entgegengesetzte* Werthe haben, von gleicher Grösse sind, die eine das Spiegelbild der andern in Bezug auf die yz-Ebene.

Um im Gedächtniss zu behalten, dass ϑ in den Polen A und A' respective die Werthe $+\infty$ und $-\infty$ hat, ist z. B. in der nächstfolgenden Figur dem A in Parenthese das Zeichen ∞, dem A' das Zeichen $-\infty$ beigefügt. Und gleiches wird auch geschehen in den später folgenden Figuren.

Jedem Raumpunct (x, y, z) entsprechen bestimmte Werthe von ϑ und ω. Sind nämlich ϱ und ϱ' die Abstände des Punctes (x, y, z) von den Polen A und A', so werden die diesem Punct zugehörigen Werthe von ϑ und ω definirt sein durch die Formeln:

$$(7.)\qquad \vartheta = \log \frac{\varrho'}{\varrho}, \quad \text{d. i. } e^{\vartheta} = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

$$(8.)\qquad \omega = \text{Winkel}\,(\varrho, \varrho'), \quad \text{vgl. die Figur p. 101.}$$

Es repräsentirt also das ω die *scheinbare Grösse* der Linie AA' für einen in (x, y, z) befindlichen Beobachter.

Wir wollen zu ϑ und ω noch dasjenige *Azimuth* φ hinzufügen, unter welchem die durch den Punct (x, y, z) gehende Meridianebe gegen die feste xy-Ebene geneigt ist, und diese drei Grössen $\vartheta, \omega, \varphi$ fortan die *dipolaren Coordinaten* des Punctes x, y, z nennen.

Bemerkung. — Betrachtet man irgend eine *specielle* unter den Kugelflächen $\vartheta =$ Const., und bezeichnet man *alle* Puncte *auf* dieser Fläche mit α, andrerseits ihren Mittelpunct mit c, so ist nach (4. α):

$$\frac{(\alpha A')}{(\alpha A)} = \sqrt{\frac{(c A')}{(c A)}},$$

mithin:

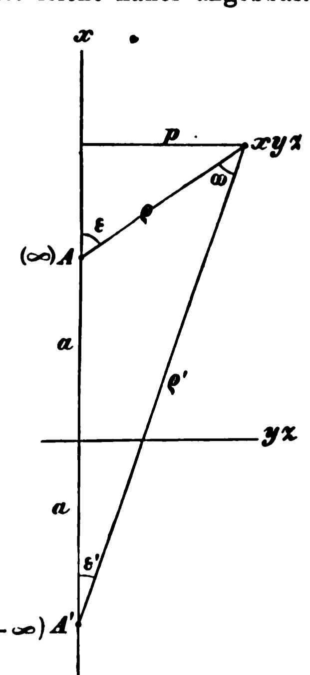
$$2 \log \frac{(\alpha A')}{(\alpha A)} = \log \frac{(c A')}{(c A)},$$

oder mit Rücksicht auf (7.):

$$2 \vartheta_\alpha = \vartheta_c,$$

wo alsdann ϑ_α die ϑ-Coordinate all' jener Puncte α, d i. den *Parameter* der Kugelfläche, andrerseits aber ϑ_c die ϑ-Coordinate ihres Mittelpunctes vorstellt. Somit ergiebt sich der Satz, *dass für jedwede Kugelfläche* $\vartheta =$ Const. *die ϑ-Coordinate des Mittelpuncts doppelt so gross ist als der Parameter der Kugelfläche.*

Der Zusammenhang zwischen diesen dipolaren Coordinaten $\vartheta, \omega, \varphi$ und den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ist leicht näher angebbar. Bezeichnet nämlich $2a$ die Länge der Linie AA', und p den Abstand des Punctes (x, y, z) von der x-Axe, so ist offenbar:



$$\begin{cases} x - a = \varrho \cos \varepsilon, \\ p = \varrho \sin \varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} x + a = \varrho' \cos \varepsilon', \\ p = \varrho' \sin \varepsilon', \end{cases}$$

wo $\varepsilon, \varepsilon'$ die Neigungswinkel der Linien ϱ, ϱ' gegen die x-Axe vorstellen. Hieraus folgt sofort:

$$(x - a) + ip = \varrho e^{i\varepsilon}, \quad (x + a) + ip = \varrho' e^{i\varepsilon'},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ sein soll. Dividirt man aber die beiden letzten Formeln durch einander, so folgt:

$$\frac{(x - a) + ip}{(x + a) + ip} = \frac{\varrho}{\varrho'} e^{i(\varepsilon - \varepsilon')},$$

also weil $\frac{\varrho}{\varrho'} = e^{-\vartheta}$ und $\varepsilon - \varepsilon' = \omega$ ist [vgl. (7.), (8.)]:

$$\frac{(x + ip) - a}{(x + ip) + a} = e^{-\vartheta + i\omega}.$$

Diese Formel, nach $x + ip$ aufgelöst, ergiebt:

$$(9.) \qquad x + ip = a \frac{1 + e^{-\vartheta + i\omega}}{1 - e^{-\vartheta + i\omega}},$$

oder falls man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $(1 - e^{-\vartheta - i\omega})$ multiplicirt:

$$x + ip = a \frac{1 + e^{-\vartheta}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) - e^{-2\vartheta}}{1 - e^{-\vartheta}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + e^{-2\vartheta}},$$

oder, falls man Zähler und Nenner mit e^{ϑ} multiplicirt:

$$x + ip = a \frac{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) + 2i \sin\omega}{(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) - 2\cos\omega}.$$

Hieraus folgt aber durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$(10.) \quad \begin{cases} x = a \dfrac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{\psi}, \\ p = a \dfrac{2 \sin\omega}{\psi}, \\ \text{wo } \psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun ist offenbar $y = p\cos\varphi$ und $z = p\sin\varphi$, falls nämlich φ (wie schon festgesetzt wurde) das Azimuth der durch den Punct (x, y, z) gehenden Meridianebene vorstellt. Somit folgt aus (10.):

$$(11.) \quad \begin{cases} x = a \dfrac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{\psi} = a \dfrac{-2i \sin i\vartheta}{\psi}, \\ y = a \dfrac{2 \sin\omega \cos\varphi}{\psi}, \\ z = a \dfrac{2 \sin\omega \sin\varphi}{\psi}, \\ \text{wo } \psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega \text{ ist.} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt z. B.:

$$(12.) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \frac{\sin^2\omega - \sin^2 i\vartheta}{\psi^2} = 4a^2 \frac{\cos^2 i\vartheta - \cos^2\omega}{\psi^2},$$

oder, falls man für ψ seine eigentliche Bedeutung [nach (11).] substituirt:

$$(13.) \quad r^2 = a^2 \frac{\cos i\vartheta + \cos\omega}{\cos i\vartheta - \cos\omega},$$

wo r den Abstand des Punctes (x, y, z) vom Anfangspunct des Coordinatensystems bezeichnet.

Specielle Bemerkungen über Puncte auf der x-Axe. — Für einen auf de x-Axe liegenden Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ ist [vgl. (8.)] das $\omega = \pi$ oder $= 0$, je nachdem der Punct *zwischen* den beiden Polen A, A' liegt, oder *ausserhalb* der Strecke AA' sich befindet. Wir wollen uns hier nur

mit dem *letztern* Fall beschäftigen, weil gerade dieser für unsere spätern Untersuchungen von Bedeutung ist.

Liegt der Punct (ϑ, ω, φ) auf der x-Axe, und *ausserhalb* der Strecke AA', ist mithin sein $\omega = 0$, so nehmen die in (11.) für ψ und x angegebenen Werthe folgende Gestalt an:

$$\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2 = (e^{\frac{1}{2}\vartheta} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta})^2,$$

$$x = a\,\frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{\psi} = a\,\frac{e^{\frac{1}{2}\vartheta} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta}}{e^{\frac{1}{2}\vartheta} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta}},$$

oder, ein wenig anders geschrieben, folgende Gestalt:

$$(\alpha.) \qquad \psi = (e^{\frac{1}{2}\vartheta} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta})^2 = \frac{(e^{\vartheta} - 1)^2}{e^{\vartheta}},$$

$$(\beta.) \qquad x = a\,\frac{e^{\vartheta} + 1}{e^{\vartheta} - 1};$$

woraus durch Differentation nach ϑ sich ergiebt:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\frac{2a}{\psi}.$$

Da das ψ seiner Bedeutung nach [vgl. z. B. (α.)] stets *positiv* ist, und Gleiches selbstverständlich auch von a gilt, so folgt aus dieser Formel (γ.), dass die x-Coordinate eines auf der x-Axe und ***ausserhalb*** der Strecke AA' liegenden Punctes bei ***wachsendem*** ϑ stets ***abnimmt***, und umgekehrt bei ***abnehmendem*** ϑ stets ***wächst***.

Bildet man die Formel (β.) für irgend zwei Puncte 1 und 2, die selbstverständlich beide auf der x-Axe und beide ausserhalb der Strecke AA' liegen sollen, so erhält man:

$$x_1 = a\,\frac{e^{\vartheta_1} + 1}{e^{\vartheta_1} - 1} \quad \text{und} \quad x_2 = a\,\frac{e^{\vartheta_2} + 1}{e^{\vartheta_2} - 1},$$

und hieraus durch Subtraction:

$$(\delta.) \qquad x_1 - x_2 = -2a\,\frac{e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_2}}{(e^{\vartheta_1} - 1)(e^{\vartheta_2} - 1)}.$$

Mit andern Worten: *Bezeichnet man den **gegenseitigen Abstand** zweier Puncte 1 und 2, die beide auf der x-Axe, und **ausserhalb** der Strecke AA' liegen, mit E, so ist:*

$$(\varepsilon.) \qquad E = \pm\, 2a\,\frac{e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_2}}{(e^{\vartheta_1} - 1)(e^{\vartheta_2} - 1)},$$

*wo das Vorzeichen $\pm$ der Art eingerichtet werden muss, dass der Werth des Ausdruckes **positiv** ist.* Ob die Puncte 1 und 2 beide oberhalb A, oder beide unterhalb A', oder ob endlich einer von ihnen oberhalb A, der andere unterhalb A' sich befindet, ist für die Anwendbarkeit des Satzes durchaus gleichgültig.

§ 3.

Der gegenseitige Abstand zweier Puncte, ausgedrückt in den dipolaren Coordinaten.*)

Markirt man irgendwo im Raume zwei Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), und bezeichnet man die *neuen* oder *dipolaren* Coordinaten derselben mit $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, so ist nach (11.):

$$(14.)\quad \begin{cases} x = a\dfrac{-2i\sin i\vartheta}{\psi}, \\ y = a\dfrac{2\sin\omega\cos\varphi}{\psi}, \\ z = a\dfrac{2\sin\omega\sin\varphi}{\psi}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = a\dfrac{-2i\sin i\vartheta_1}{\psi_1}, \\ y_1 = a\dfrac{2\sin\omega_1\cos\varphi_1}{\psi_1}, \\ z_1 = a\dfrac{2\sin\omega_1\sin\varphi_1}{\psi_1}, \end{cases}$$

wo ψ und ψ_1 die Bedeutungen haben:

$$(15.)\quad \psi = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega, \qquad \psi_1 = 2\cos i\vartheta_1 - 2\cos\omega_1.$$

Bezeichnet man nun die *gegenseitige Entfernung* der beiden Puncte mit E:

$$(16.)\quad E^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

so ergiebt sich durch Substitution der Werthe (14.) nach einiger Rechnung (die hier nicht weiter ausgeführt werden soll) folgende Formel:

$$(17.)\quad E^2 = 4a^2\,\frac{2\cos i(\vartheta - \vartheta_1) - 2\cos\gamma}{\psi\psi_1},$$

wo $\cos\gamma$ die Bedeutung hat:

$$(18.)\quad \cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1).$$

Das hier eingeführte γ hat übrigens eine *einfache geometrische* Bedeutung. Legt man nämlich durch den gegebenen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ einen von A nach A' gehenden Kreisbogen, so ist die ω-Coordinate des Punctes durch den Peripheriewinkel dieses Bogens dargestellt, mithin ebenso gross wie derjenige Winkel, unter welchem der Bogen selber im Pole A gegen die x-Axe geneigt ist (vgl. die beistehende Figur). Und mit

---

*) Die *dipolaren Coordinaten* dürften vielleicht zum ersten Mal von *Thomson* eingeführt sein, im Jahr 1847. Vgl. die *Papers on electrostatics and magnetism, by Thomson*, London, 1872, p. 147. Daselbst findet man bereits die in diesem § in (14.) und (17.) für x, y, z und E^2 angegebenen Formeln, allerdings in *anderer* Bezeichnungsweise. Die von mir gebrauchte Bezeichnungsweise ist genau dieselbe, wie in meinem Werke von 1862 über die excentrischen Kugelflächen, nur mit dem einen Unterschiede, dass $-x$ statt $+x$ gesetzt, nämlich die Richtung der x-Axe nicht, wie dort, vom Pole $A(\vartheta = \infty)$ zum Pole $A'(\vartheta = -\infty)$, sondern umgekehrt von A' nach A gerechnet ist.

Rücksicht hierauf ergiebt sich folgender Satz: *Construirt man über AA' als gemeinschaftlicher Sehne zwei Kreisbogen, von denen der eine durch den Punct* $(\vartheta, \omega, \varphi)$, *der andere durch den Punct* $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ *geht, so wird das durch die Formel* (18.) *definirte* γ *nichts Andres sein, als derjenige Winkel, unter welchem die beiden Bogen im Pole* A *gegen einander geneigt sind.*

Man kann die Formel (17.), mit Rücksicht auf (15.), auch so schreiben:

$$(19.)\quad E^2 = 4a^2 \frac{e^{\vartheta-\vartheta_1} + e^{\vartheta_1-\vartheta} - 2\cos\gamma}{(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega)(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}-2\cos\omega_1)}.$$

Lässt man hier das $\vartheta_1 = +\infty$ werden, oder, geometrisch ausgedrückt, lässt man den Punct $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ nach A rücken, so erhält man:

$$(20.)\qquad \varrho^2 = 4a^2 \frac{e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega},$$

wo alsdann ϱ den Abstand des Puncts $(\vartheta, \omega, \varphi)$ vom Pole A vorstellt. Und lässt man andrerseits in (19.) das $\vartheta_1 = -\infty$ werden, so erhält man:

$$(21.)\qquad \varrho'^2 = 4a^2 \frac{e^{\vartheta}}{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega},$$

wo ϱ' den Abstand des Punctes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ vom Pole A' bezeichnet. Diese Formeln (20.), (21.) können, mit Rücksicht auf (15.), so geschrieben werden:

$$(22.)\qquad \varrho = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}\, e^{-\frac{1}{2}\vartheta}, \qquad \varrho' = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}\, e^{\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Und hieraus folgen sofort die weiteren Formeln:

$$(23.)\qquad \varrho\varrho' = \frac{4a^2}{\psi}, \qquad \frac{\varrho'}{\varrho} = e^{\vartheta},$$

von denen die *letztere* nur eine Reproduction der schon früher angegebenen Formel (7.) ist.

Behufs späterer Betrachtungen erscheint es zweckmässig, bei einem beliebig gegebenen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ für das *geometrische Mittel seiner beiden Polabstände* ϱ, ϱ' eine besondere Bezeichnung einzuführen:

$$(24.)\qquad \xi = \sqrt{\varrho\varrho'}.$$

Dann ist nach (23.) dieses

$$(25.)\qquad \xi = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}.$$

Sämmtliche fünf Grössen $\vartheta, \omega, \varphi, \psi, \xi$ können als dipolare Coordinaten des betrachteten Punctes bezeichnet werden, etwa $\vartheta, \omega, \varphi$ als die *eigentlichen* und ψ, ξ als die *überzähligen* Coordinaten.

Zwischen ψ und ξ findet die einfache Relation (25.) statt; sodass es vielleicht als Luxus erscheint, neben ψ noch das ξ, oder neben ξ noch das ψ einzuführen. Man möge entschuldigen, dass ich trotzdem *beide* Grössen ψ und ξ beibehalte. Der Grund ist der, dass ψ sich wesentlich empfiehlt durch seine *einfache analytische* Gestalt ($\psi = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$); dass andrerseits aber ξ nicht minder sich empfiehlt durch seine einfache *geometrische* Bedeutung (denn ξ ist das geometrische Mittel der beiden Polabstände).

Ueber die unendlich fernen Puncte. — Die Formel (23.) lautet mit Rücksicht auf (15.):

$$(\alpha.)\qquad \varrho\varrho' = \frac{4a^2}{\psi} = \frac{2a^2}{e^\vartheta + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}.$$

Soll nun der betrachtete Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ in *unendlicher Ferne* liegen, so muss $\varrho\varrho' = \infty$, mithin

$$(\beta.)\qquad e^\vartheta + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega = 0$$

sein. Hieraus aber folgt sofort, dass für diesen Punct $\vartheta = 0$, und ω ebenfalls $= 0$ sein muss [denn ω liegt stets zwischen den Grenzen 0 und π, vgl. [(3.) p. 98].

Bezeichnet R einen vom Anfangspunct des Coordinatensystems nach dem *unendlich fernen* Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ hinlaufenden Strahl, und α den Neigungswinkel dieses Strahls gegen die x-Axe, so ist nach (11.):

$$(\gamma.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = \frac{2\sin\omega}{e^\vartheta - e^{-\vartheta}}.$$

Da nun aber, wie wir soeben gesehen haben, die Coordinaten ϑ und ω des betrachteten Punctes *Null* oder (was dasselbe) *unendlich klein* sind, so nimmt die Formel (γ.) die Gestalt an: $\frac{0}{0}$, oder in Wirklichkeit die Gestalt:

$$(\delta.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega}{\vartheta}.$$

Also der Satz: *Für jedweden unendlich fernen Punct ist sowohl ϑ wie ω unendlich klein. Will man insbesondere diejenigen unendlich fernen Puncte haben, deren Winkelabstand von der x-Axe einen vorgeschriebenen Werth α hat, so muss man ϑ und ω in solcher Weise unendlich klein werden lassen, dass der Quotient $\frac{\omega}{\vartheta} = \operatorname{tg}\alpha$ wird.*

§ 4.

Das Linienelement, ausgedrückt in den dipolaren Coordinaten.

Nach (17.) und (18.) ist:

$$(26.)\quad E^2 = 8a^2 \frac{\cos i(\vartheta - \vartheta_1) - [\cos\omega \cos\omega_1 + \sin\omega \sin\omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]}{\psi\psi_1},$$

oder was dasselbe:

$$(27.)\quad E^2 = 8a^2 \frac{\cos i(\vartheta - \vartheta_1) - \cos(\omega - \omega_1) + 2\sin\omega \sin\omega_1 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\psi\psi_1}.$$

Bringt man diese Formel auf den besondern Fall in Anwendung, dass die beiden Puncte $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ einander *unendlich nahe* sind:

$$\vartheta_1 = \vartheta + d\vartheta, \quad \omega_1 = \omega + d\omega, \quad \varphi_1 = \varphi + d\varphi, \quad \psi_1 = \psi + d\psi,$$

und bezeichnet man in diesem Fall den gegenseitigen Abstand der beiden Puncte mit ds, so erhält man:

$$(28.)\quad (ds)^2 = 8a^2 \frac{\cos(i\,d\vartheta) - \cos(d\omega) + 2\sin\omega \sin(\omega + d\omega) \sin^2(\frac{1}{2}d\varphi)}{\psi(\psi + d\psi)}.$$

Der *Zähler* dieses Ausdrucks kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$[1 + \tfrac{1}{2}(d\vartheta)^2] - [1 - \tfrac{1}{2}(d\omega)^2] + \tfrac{1}{2}(d\varphi)^2 \sin\omega \sin(\omega + d\omega),$$

oder kürzer auch so:

$$\tfrac{1}{2}[(d\vartheta)^2 + (d\omega)^2 + (d\varphi)^2 \sin\omega \sin(\omega + d\omega)].$$

Substituirt man aber dies in (28.), und unterdrückt man dabei zugleich die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung, so erhält man:

$$(29.)\qquad (ds)^2 = 4a^2 \frac{(d\vartheta)^2 + (d\omega)^2 + (\sin\omega\, d\varphi)^2}{\psi^2}.$$

Diese *fundamentale Formel* wollen wir sogleich weiter benutzen zur Herstellung des analytischen Ausdrucks für gewisse *Flächen*elemente.

Wir denken uns, ausser den *Kugelflächen* (Parameter ϑ) und den *Conoidflächen* (Parameter ω), auch noch das System der *Meridianebenen* construirt (als deren Parameter das Azimuth φ angesehen werden kann), und haben alsdann im Ganzen drei zu einander orthogonale Flächensyteme, durch welche der Raum in lauter unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt wird.

Ein solches Parallelepipedum kann man in folgender Weise entstehen lassen: Man markirt irgendwo im Raume einen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und bezeichnet mit

$$ds_\vartheta, \quad ds_\omega, \quad ds_\varphi$$

diejenigen Wegelemente, welche jener Punct durchlaufen würde, falls man seine Coordinaten entweder um $(d\vartheta, 0, 0)$, oder um $(0, d\omega, 0)$, oder endlich um $(0, 0, d\varphi)$ anwachsen lassen wollte. In der That sind alsdann ds_ϑ, ds_ω, ds_φ die Kanten eines Parallelepipedums der genannten Art. Und zugleich ergiebt sich dabei aus (29.):

$$(30.)\qquad \begin{aligned} (ds_\vartheta)^2 &= \frac{4a^2(d\vartheta)^2}{\psi^2}, \\ (ds_\omega)^2 &= \frac{4a^2(d\omega)^2}{\psi^2}, \\ (ds_\varphi)^2 &= \frac{4a^2(\sin\omega\, d\varphi)^2}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Die ds_ϑ, ds_ω, ds_φ repräsentiren die Längen gewisser Wegelemente, und sind, dieser Definition zufolge, stets *positiv*. Hingegen können die Zuwüchse $d\vartheta$, $d\omega$, $d\varphi$, falls nichts Näheres darüber festgesetzt wird, von beliebigem Vorzeichen sein. Der Einfachheit willen nehmen wir an, dass diese $d\vartheta$, $d\omega$, $d\varphi$ *wirkliche Zuwüchse*, also *positive* Grössen seien. Alsdann ergiebt sich aus (30.):

$$(31.)\qquad \begin{aligned} ds_\vartheta &= \frac{2a\,d\vartheta}{\psi}, \\ ds_\omega &= \frac{2a\,d\omega}{\psi}, \\ ds_\varphi &= \frac{2a\sin\omega\, d\varphi}{\psi}; \end{aligned}$$

denn es ist zu beachten, dass a, ψ und $\sin\omega$, ihrer Definition zufolge *stets positiv* sind. [Vgl. (15.) und (3.)].

Die Linienelemente ds_ϑ, ds_ω und ds_φ stehen senkrecht respective gegen die durch den Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ gehende *Kugelfläche*, *Conoidfläche* und *Meridianebene*. Demgemäss wird z. B. das Product $ds_\omega ds_\varphi$ ein kleines Rechteck repräsentiren, dessen Seiten ds_ω und ds_φ *auf der genannten Kugelfläche* liegen. Oder kürzer ausgedrückt: Dieses Product $ds_\omega ds_\varphi$ ist ein Element jener Kugelfläche. U. s. w. — Mit Rücksicht auf (31.) erhalten wir daher folgende Formeln:

$$(32.)\qquad \begin{aligned} (\text{Element der Kugelfläche}) &= ds_\omega ds_\varphi = \frac{4a^2\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\psi^2}, \\ (\text{Element der Conoidfläche}) &= ds_\vartheta ds_\varphi = \frac{4a^2\sin\omega\, d\vartheta\, d\varphi}{\psi^2}, \\ (\text{Element der Meridianebene}) &= ds_\vartheta ds_\omega = \frac{4a^2 d\vartheta\, d\omega}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Bemerkung. — Die Vorzeichen in den Formeln (31.), (32.) sind, wie aus unseren Erörterungen hervorgeht, nur dann richtig, wenn wir die $d\vartheta$, $d\omega$, $d\varphi$ als wirkliche Zuwüchse, d. h. als *positive* Grössen an-

sehen. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so wird z. B. die erste der Formeln (31.) so zu schreiben sein:

$$ds_\vartheta = \pm \frac{2a\,d\vartheta}{\psi}.$$

Das ds_ϑ repräsentirt ein Element der auf der Kugelfläche $\vartheta =$ Const. errichteten Normale N, und mag als solches mit dN benannt werden. Alsdann ist also:

$$dN = \pm \frac{2a\,d\vartheta}{\psi}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{d\vartheta}{dN} = \pm \frac{\psi}{2a}.$$

Da nun $\frac{\psi}{2a}$ stets positiv ist [vgl. (15.) p. 104], so gelangt man zu folgendem Satz: *Errichtet man im Puncte (ϑ, ω, φ) auf der durch diesen Punct gehenden Kugelfläche eine Normale N (gleichgültig in welcher Richtung), so wird der Differentialquotient von ϑ nach dieser Normale den Werth haben:*

(33.) $$\frac{d\vartheta}{dN} = \pm \frac{\psi}{2a}, \quad \text{d. i.} = \pm \frac{2a}{\xi^2}, \quad \text{[vgl. (25.) p. 105]},$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem ϑ in der Richtung N wächst oder abnimmt.

§ 5.

Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Puncte.

Die bekannte *Laplace-Legendre*'sche Entwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\omega + r^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n P_n(\cos\omega)$$

ist convergent und gültig, falls r ein positiver ächter Bruch ist. Demgemäss behält diese Entwicklung den eben genannten Charakter, falls man $r = e^{-g}$ setzt, und dabei unter g eine *positive* Grösse versteht. Man gelangt in solcher Weise, falls man noch auf beiden Seiten mit $e^{-\frac{1}{2}g}$ multiplicirt, zu der Formel:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}g}}{\sqrt{1 - 2e^{-g}\cos\omega + e^{-2g}}} = e^{-\frac{1}{2}g} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-ng} P_n(\cos\omega), \quad (g = \text{pos.})$$

Diese Formel aber kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{\sqrt{(e^g + e^{-g}) - 2\cos\omega}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})g} P_n(\cos\omega), \quad (g = \text{pos.}).$$

oder, wenn man zur Abkürzung $n + \frac{1}{2} = N$ setzt, auch so:

(34.) $$\frac{1}{\sqrt{2\cos ig - 2\cos\omega}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-Ng} P_n(\cos\omega), \quad (g = \text{pos.}).$$

Diese Formel lässt sich z. B. anwenden auf die früher, in (15.), betrachtete Function $\psi = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega$. Da das ϑ bald positiv, bald negativ sein kann, so erhält man *zwei* Formeln, nämlich:

$$(35.\text{a})\qquad \frac{1}{\sqrt{\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N\vartheta} P_n(\cos\omega),\quad \text{falls } \vartheta = \text{pos.};$$

$$(35.\text{b})\qquad \text{hingegen} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N\vartheta} P_n(\cos\omega),\quad \text{falls } \vartheta = \text{neg.}$$

Diese einfachen Dinge vorangeschickt, gehen wir über zur eigentlichen Aufgabe dieses §, nämlich zur Entwicklung der *reciprocen Entfernung* zweier Puncte $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$. Bezeichnet man die Entfernung selber mit E, und ihren reciprocen Werth mit T, so ist nach (17.), (18.):

$$(36.)\qquad T = \frac{1}{E} = \frac{\sqrt{\psi}\,\sqrt{\psi_1}}{2a}\,\frac{1}{\sqrt{2\cos i(\vartheta - \vartheta_1) - 2\cos\gamma}},$$

$$\text{wo } \cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1).$$

Hieraus folgt mittelst der Formel (34.) sofort:

$$(37.\text{a})\qquad T = \frac{\sqrt{\psi}\,\sqrt{\psi_1}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma),\quad \text{falls } \vartheta - \vartheta_1 = \text{pos.};$$

$$(37.\text{b})\qquad T = \frac{\sqrt{\psi}\,\sqrt{\psi_1}}{2a}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma),\quad \text{falls } \vartheta - \vartheta_1 = \text{neg.*})$$

Da der $\cos\gamma$ den in (36.) aufgeführten Werth besitzt, so kann die Function $P_n(\cos\gamma)$ in die bekannte, schon von *Laplace* angegebene, nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi_1)$ fortlaufende Form versetzt werden:

$$(38.)\quad P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\omega)P_n(\cos\omega_1) + L'\cos(\varphi - \varphi_1) + L''\cos 2(\varphi - \varphi_1) + \cdots$$

wo die $L', L'', \ldots$ Functionen von ω, ω_1 sind. Diese Functionen $L', L'', \ldots$ lassen sich bekanntlich ebenfalls in ziemlich einfacher Gestalt angeben. Für unsere Zwecke aber ist ein näheres Eingehen hierauf nicht erforderlich.

---

*) So einfach nun die Ableitung der Formeln (37. a, b) auch sein mag, so scheint es mir, im Anbetracht ihrer *fundamentalen* Bedeutung für die ganze zu entwickelnde Theorie, doch angemessen zu bemerken, dass diese Formeln wol zuerst in meinem Werke von 1862 über die nichtconcentrischen Kugelflächen, daselbst p. 90, gegeben sein dürften. In jenem Werke ist gezeigt, wie man unter Anwendung dieser Formeln alle Aufgaben der Elektrostatik und des Wärmegleichgewichts für *zwei* Kugeln mit ebenderselben Leichtigkeit, wie nur für *eine* Kugel, zu lösen im Stande ist.

§ 6.

Sich anschliessende Betrachtungen.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Es ist gegeben eine den Pol A umschliessende, ausserordentlich kleine Kugelfläche des dipolaren Systems, deren Parameter ϑ_1 also *positiv* und *ausserordentlich gross* sein wird:

$$(\alpha.) \qquad 0 < \vartheta_1 < \infty.$$

Diese Fläche sei mit Masse belegt, in beliebiger Weise, jedoch *symmetrisch zur x-Axe*. Es soll das *Potential* dieser Belegung auf einen variablen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$ berechnet werden, unter der Voraussetzung, dass der Punct *ausserhalb* der Kugelfläche liegt, mithin

$$(\beta.) \qquad \vartheta < \vartheta_1$$

ist. Bezeichnet man also z. B. irgend ein Element der Kugelfläche mit $d\sigma_1$ und seine Coordinaten mit $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, so wird die reciproce Entfernung T dieses Elementes vom Puncte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ zufolge $(\beta.)$ und mit Rücksicht auf (37. a, b) den Werth haben:

$$(\gamma.) \qquad T = \frac{\sqrt{\psi}\,\sqrt{\psi_1}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma),$$

wo $P_n(\cos\gamma)$ nach (38.) darstellbar ist durch:

$$(\delta.) \quad P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\omega)P_n(\cos\omega_1) + L'\cos(\varphi-\varphi_1) + L''\cos 2(\varphi-\varphi_1) + \cdots,$$

Die Dichtigkeit q_1 einer auf der Kugelfläche (ϑ_1) ausgebreiteten Massenbelegung wird im Allgemeinen eine beliebige Function von ω_1 und φ_1 sein. In unserm Falle aber wird sie, weil die Belegung symmetrisch zur x-Axe sein soll, lediglich von ω_1 abhängen:

$$(\varepsilon.) \qquad q_1 = f(\omega_1).$$

Ausserdem hat das Flächenelement $d\sigma_1$ den Werth:

$$(\zeta.) \qquad d\sigma_1 = \frac{4a^2 \sin\omega_1\, d\omega_1\, d\varphi_1}{\psi_1^{\,2}}, \quad \text{[vgl. (32.) p. 108]}.$$

Das Potential U der in Rede stehenden Massenbelegung auf den Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$:

$$(\eta.) \qquad U = \iint T q_1\, d\sigma_1$$

gewinnt nun durch Substitution der Werthe $(\gamma.)$, $(\varepsilon.)$, $(\zeta.)$ die Gestalt:

$$(\vartheta.) \quad U = 2a\sqrt{\psi} \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma) \right) \frac{f(\omega_1)\sin\omega_1\, d\omega_1\, d\varphi_1}{\psi_1\sqrt{\psi_1}}.$$

Substituirt man hier für $P_n(\cos\gamma)$ die Entwicklung (δ.), so ist die (von 0 bis 2π gehende) Integration nach φ sofort ausführbar; man erhält somit:

$$(\iota.)\quad U = 4\pi a\sqrt{\psi}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\omega)\, P_n(\cos\omega_1)\right)\frac{f(\omega_1)\sin\omega_1\, d\omega_1}{\psi_1\sqrt{\psi_1}}.$$

Um nun die Integration nach ω_1 ebenfalls auszuführen, bemerken wir, dass der Ausdruck:

$$(\varkappa.)\qquad \frac{q_1}{\psi_1\sqrt{\psi_1}} = \frac{f(\omega_1)}{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}-2\cos\omega_1)^{\frac{3}{2}}},\qquad \text{[vgl. (15.) p. 104]},$$

abgesehen von der Constanten ϑ_1 (dem Parameter der gegebenen Kugelfläche) nur von ω_1 abhängt, mithin z. B. entwickelbar ist in eine nach den $P_n(\cos\omega_1)$ fortschreitende Reihe:

$$(\lambda.)\qquad \frac{q_1}{\psi_1\sqrt{\psi_1}} = \frac{f(\omega_1)}{\psi_1\sqrt{\psi_1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P_n(\cos\omega_1),$$

wo die A_n Constanten sind. Substituirt man den Werth (λ.) in die Formel (ι.), so folgt:

$$(\mu.)\quad U = 4\pi a\sqrt{\psi}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\omega)P_n(\cos\omega_1)\right)\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P_n(\cos\omega_1)\right)\sin\omega_1 d\omega_1.$$

Hieraus aber folgt, mittelst der bekannten Integral-Eigenschaften der Functionen P_n, sofort:

$$(\nu.)\qquad U = 4\pi a\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2}{2n+1}A_n e^{N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\omega),$$

oder, falls man die Constante

$$(\xi.)\qquad \frac{8\pi a}{2n+1}A_n e^{-N\vartheta_1} = B_n$$

setzt, und ausserdem das $\sqrt{\psi}$ *unter* das Summenzeichen bringt:

$$(o.)\qquad U = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n\sqrt{\psi}\, e^{N\vartheta} P_n(\cos\omega),\quad \text{wo } N = n + \tfrac{1}{2} \text{ ist.}$$

Wenn es uns beliebt, können wir unsere Betrachtung z. B. auf den *besondern* Fall anwenden, dass in (λ.) die Coefficienten A_n, mit alleiniger Ausnahme von A_5, alle $= 0$ sind, also anwenden auf eine Massenbelegung, deren Dichtigkeit q_1 der Formel entspricht:

$$(\pi.)\qquad \frac{q_1}{\psi_1\sqrt{\psi_1}} = A_5 P_5(\cos\omega_1).$$

Alsdann werden nach (ξ.) die B_n ebenfalls $= 0$, mit alleiniger Ausnahme von B_5; so dass man also aus (o.) erhält

$$(\varrho.)\qquad U = B_5\sqrt{\psi}\, e^{(5+\frac{1}{2})\vartheta} P_5(\cos\omega),$$

wo B_5 eine *Constante* ist. — Der Ausdruck (ϱ.) repräsentirt also dasjenige Potential, welches auf den variablen Punct (ϑ, ω, φ) ausgeübt wird von einer gewissen Massenbelegung der den Pol A umschliessenden kleinen Kugelfläche. Da diese Kugelfläche *beliebig* klein, mithin auch *unendlich* klein sein darf, so können wir jene auf ihr ausgebreitete Massenbelegung kurzweg als *eine gewisse im Pole A vorhandene Masse* bezeichnen, mithin sagen:

Der Ausdruck (ϱ.) *repräsentire dasjenige Potential, welches auf den variablen Punct* (ϑ, ω, φ) *ausgeübt wird von einer gewissen im Pole A vorhandenen Masse.* — Demgemäss gelangen wir, da offenbar die Zahl 5 in (ϱ.) eine ganz *zufällig* gewählte ist, zu folgendem Resultat:

Setzt man zur Abkürzung $\psi = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega$ [vgl. (15.) p. 104], *und ferner* $N = n + \frac{1}{2}$, *so ist die Function*

$$(39.)\qquad \sqrt{\psi}\, e^{-N\vartheta} P_n(\cos\omega)$$

nichts Anderes als das Potential derjenigen Wirkung, welche auf den variablen Punct (ϑ, ω, φ) *ausgeübt wird von einer gewissen im Pole* $A\,(\vartheta = +\infty)$ *vorhandenen Masse, deren Beschaffenheit abhängt von dem Werthe der gegebenen Zahl n.*

In ganz analoger Weise wird man offenbar zu dem Parallelsatz gelangen, *dass die Function*

$$(40.)\qquad \sqrt{\psi}\, e^{+N\vartheta} P_n(\cos\omega)$$

angesehen werden kann als das Potential derjenigen Wirkung, welche auf den Punct (ϑ, ω, φ) *ausgeübt wird von einer gewissen im Pole* $A'\,(\vartheta = -\infty)$ *vorhandenen Masse.**)

§ 7.

Hydrodynamische Aufgabe. Ueber die Bewegung einer Kugel im Innern einer Flüssigkeit, die äusserlich begrenzt ist von einer fest aufgestellten Kugelschaale.

Die gegebene incompressible Flüssigkeit sei äusserlich begrenzt von einer *starren Schaale*, deren innere Oberfläche σ_0 heissen mag. Und im Innern der Flüssigkeit befinde sich ein *starrer Körper*, dessen Oberfläche σ genannt werden mag. Jene Schaale sei *völlig fest aufgestellt;* der Körper hingegen *beweglich.* Doch sei durch irgend welche Vorrichtungen dafür gesorgt, *dass der Körper nur sich selber parallel in der Richtung der x-Axe fortschreiten kann*; (vgl. etwa die Note p. 77).

*) Diese Sätze (39.), (40.) sind nur specielle Fälle eines früher von mir angegebenen allgemeineren Satzes. Vgl. mein Werk von 1862, über die nichtconcentrischen Kugelflächen, daselbst p. 102.

Abgesehen von den Druckkräften, mit denen Flüssigkeit und Schaale, ebenso Flüssigkeit und Körper gegenseitig aufeinander einwirken, mögen noch *gegebene äussere Kräfte* vorhanden sein, welche theils auf den Körper, theils auf die Flüssigkeit influiren. Und zwar mag die Summe der x-Componenten der den *Körper* sollicitirenden äusseren Kräfte mit X, und das Potential der die *Flüssigkeit* sollicitirenden äusseren Kräfte mit $V = V(x, y, z)$ bezeichnet sein.

Ueberdies sei gegeben der *Anfangszustand* des Körpers und ebenso der der Flüssigkeit, und zwar letzterer als ein *wirbelfreier* [vgl. übrigens die Bemerkung p. 77]. *Die unter diesen Umständen eintretende Bewegung des Körpers und der Flüssigkeit soll näher untersucht werden, und zwar unter der besonderen Voraussetzung, dass σ_0 und σ Kugelflächen sind, und dass das feste Centrum c_0 der Kugelfläche σ_0 auf derjenigen geraden Linie sich befindet, längs welcher das Centrum c der Kugel σ sich bewegt.* Diese gerade Linie mag der Einfachheit willen geradezu zur *x-Axe des Coordinatensystems* genommen werden.

Bezeichnet $\mathfrak{x}$ die x-Coordinate des Kugelcentrums c, und M die Masse der Kugel, so ergiebt sich für die Bewegung derselben die Differentialgleichung:

$$M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p, \tag{1.}$$

wo X die schon genannte Bedeutung hat, mithin *gegeben* ist, während X^p die x-Componente derjenigen Wirkung vorstellt, welche auf die Kugel ausgeübt wird durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit. *Unsere Hauptaufgabe besteht nun in der Berechnung dieser noch unbekannten Kraft X^p.* Und zu diesem Zwecke benutzen wir das Princip der lebendigen Kraft:

$$\frac{d(T + W)}{dt} = - \frac{dL}{dt}, \quad \text{[vgl. (5.) p. 37].} \tag{2.}$$

Was die einzelnen Glieder dieser Gleichung betrifft, so hat zuvörderst die während der Zeit dt von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübte Arbeit dL den Werth:

$$dL = X^p d\mathfrak{x}, \tag{3.}$$

wo X^p die schon genannte Bedeutung hat, und $d\mathfrak{x}$ den Zuwachs der Coordinate $\mathfrak{x}$ während der Zeit dt bezeichnet. Ferner ergeben sich für das von den *äussern Kräften* auf die Flüssigkeit ausgeübte Gesammtpotential W die Formeln:

$$W = C - W^j,$$

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\partial W^j}{\partial \mathfrak{x}} \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = X^j \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \quad \text{[vgl. (6.), (7.), (8.), (9.) p. 78].} \tag{4.}$$

wo z. B. X^j die x-Componente derjenigen Wirkung vorstellt, welche die dem Potential V entsprechenden *äussern Kräfte* auf die Kugel ausüben *würden*, falls ihre Materie identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit. Demgemäss kann diese Kraft X^j kurzweg als *die dem Princip des Archimedes entsprechende Kraft* bezeichnet werden.

Substituirt man die Werthe (3.), (4.) in die Formel (2.), so erhält man sofort:

$$\frac{dT}{dt} = -(X^j + X^p)\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -(X^j + X^p)\,G, \tag{5.}$$

wo zur Abkürzung die augenblickliche Geschwindigkeit der Kugel:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = G \tag{6.}$$

gesetzt ist. Aus (5.) folgt nun:

$$X^p = -X^j - \frac{1}{G}\frac{dT}{dt}. \tag{7.}$$

Mittelst dieser Formel (7.) werden wir nun weiterhin die unbekannte Kraft X^p wirklich berechnen, und zwar in der Weise, dass wir zuvörderst das Geschwindigkeitspotential Φ der Flüssigkeit, sodann die lebendige Kraft T der Flüssigkeit bestimmen, und endlich durch Substitution des Werthes von T in jene Formel (7.) den Werth der Kraft X^p ermitteln. Die hiebei zur Bestimmung von Φ und T anzuwendenden Gleichungen sind leicht angebbar.

Der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$ ist nämlich ein schaalenförmiger, begrenzt von den beiden Kugelflächen σ und σ_0, und folglich ein *einfach zusammenhängender*. Demgemäss ergeben sich für das Geschwindigkeitspotential Φ der Flüssigkeit die Bedingungen:

$$\Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\ \textit{stetig}, \text{ und } \Delta\Phi = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R}; \tag{8.}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = \frac{d\xi}{dt}\cos(\mathsf{N}, x) + \frac{d\eta}{dt}\cos(\mathsf{N}, y) + \frac{d\zeta}{dt}\cos(\mathsf{N}, z), \text{ an der Oberfläche von } \mathfrak{R}. \tag{9.}$$

In der That erhält man diese Bedingungen sofort aus den Sätzen p. 25, falls man nur die dortige Formel (I. c) in diejenige Gestalt versetzt, in welcher sie in (6.) p. 18 sich präsentirt. Auch folgt aus jenen Sätzen p. 25, dass *durch diese Bedingungen* (8.), (9.) *die Function Φ völlig bestimmt ist, bis auf ein additives nur noch von der Zeit abhängendes Glied.*

Nun besitzt aber die Kugel σ eine nur fortschreitende Bewegung in der Richtung der x-Axe. Die Geschwindigkeit eines jeden Oberflächenpunctes (ξ, η, ζ) der Kugel ist daher identisch mit der Geschwindigkeit ihres Centrums. Also:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = G, \text{ [vgl. (6.)], und } \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Andererseits soll die äussere Begrenzungsfläche σ_0 der Flüssigkeit absolut unbeweglich sein. Für jeden Punct (ξ, η, ζ) dieser Fläche ist daher

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Und demgemäss nehmen die Bedingungen (8.), (9.) folgende Gestalt an:

$$(10.) \qquad \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \textit{ stetig}, \text{ und } \Delta\Phi = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R};$$

$$(11.\,a) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = G \cos(\mathsf{N}, x), \text{ auf der Fläche } \sigma;$$

$$(11.\,b) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = 0, \text{ auf der Fläche } \sigma_0.$$

Bemerkung. — Bezeichnet man einen beliebigen Punct der Fläche σ mit (x, y, z) und die daselbst auf σ errichtete Normale mit N, so ist offenbar:

$$\frac{\partial x}{\partial \mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, x), \qquad \frac{\partial y}{\partial \mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial \mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, z).$$

Und demgemäss kann in der Formel (11. a) statt $\cos(\mathsf{N}, x)$ auch der Differentialquotient $\frac{\partial x}{\partial \mathsf{N}}$ substituirt werden.

Sobald Φ mittelst der Formeln (10.), (11. a, b) berechnet ist, erhält man sofort den Werth der lebendigen Kraft T:

$$(12.) \qquad T = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi)\, dx\,dy\,dz, \quad \text{[vgl. (2.) p. 44]}.$$

Diesen Werth aber kann man, weil Φ im Raume $\mathfrak{R}$ den Bedingungen (10.) entspricht, auch so schreiben:

$$(13.) \qquad T = \frac{\varrho}{2} \left(\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma + \iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} d\sigma_0 \right), \quad \text{[vgl. } (\gamma.) \text{ p. 41]},$$

wo das eine Integral über alle Elemente $d\sigma$ der Fläche σ, das andere über alle Elemente $d\sigma_0$ der Fläche σ_0 hinerstreckt zu denken ist. Diese letzte Formel (13.) gewinnt endlich mit Rücksicht auf (11. a, b) die einfachere Gestalt:

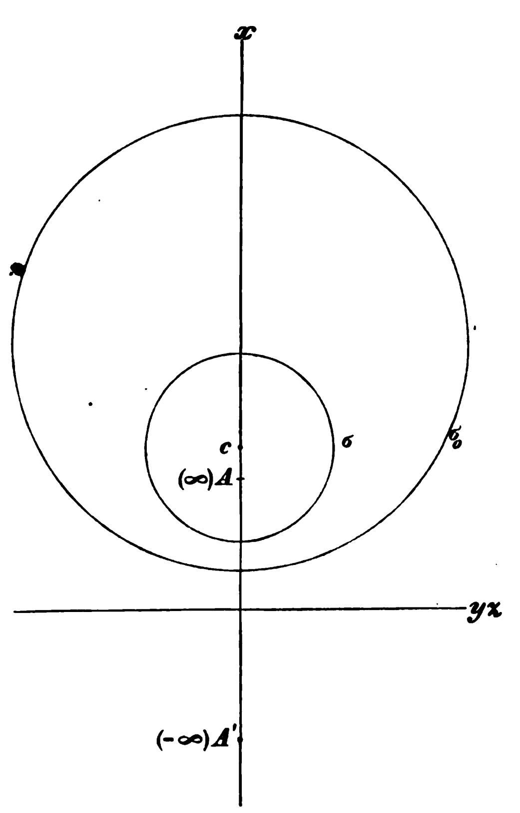
$$(14.) \qquad T = \frac{\varrho G}{2} \iint \Phi \cos(\mathsf{N}, x)\, d\sigma = -\frac{\varrho G}{2} \iint \Phi \cos(R, x)\, d\sigma.$$

Denn in all' unsern Formeln ist unter N die der Flüssigkeit *abgewendete* Normale zu verstehen, während das R in (14.) die entgegengesetzte Richtung, nämlich die des Kugelradius repräsentiren soll.

§ 8.

Berechnung des Geschwindigkeitspotentials.

Wir betrachten das gegebene materielle System *in irgend einem Zeitaugenblick* t seiner noch unbekannten Bewegung. Construiren wir nun in der xy-Ebene eine Kreisperipherie, welche in diesem Augenblick die beiden Kugelflächen σ und σ_0 *senkrecht* durchbohrt, so wird die x-Axe von dieser Peripherie in zwei Puncten geschnitten werden, von denen der eine A innerhalb σ, der andere A' ausserhalb σ_0 liegt. Betrachtet man aber diese beiden Puncte A und A' als *Pole*, so sind jene Flächen σ und σ_0 nichts Anderes als zwei Kugelflächen des zu A und A' gehörigen dipolaren Systems; wie sich solches aus unseren früheren geometrischen Betrachtungen (p. 97) sofort ergiebt. Und um alles mit unsern damaligen Betrachtungen in Einklang zu bringen (vgl. z. B. die Figur p. 97), wollen wir die Dinge so einrichten, dass die x-Axe des dipolaren Systems vertikal *nach Oben* gerichtet ist, dass ferner der Pol A und die beiden Kugelflächen *oberhalb* der yz-Ebene liegen, mithin der Pol A' *unterhalb* dieser Ebene sich befindet. Bezeichnet man alsdann die Parameter der beiden Kugelflächen σ und σ_0 mit $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = \tau_0$, so sind offenbar



(1.) τ selber, und $\delta = \tau - \tau_0$ zwei *positive Grössen*,

und folglich

(2.) $$q = e^{-\tau} \text{ und } f = e^{-\delta} \text{ *positive ächte Brüche.*}$$

Dies vorangeschickt, nehmen die für das Geschwindigkeitspotential $\Phi = \Phi(x, y, z)$ aufgestellten Bedingungen, falls man die dipo-

laren Coordinaten von (x, y, z) mit $(\vartheta, \omega, \varphi)$ bezeichnet, folgende Gestalt an:

$$(3.)\quad \Phi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ \textit{stetig},\ \text{und } \Delta\Phi = 0 \text{ im Raume } \mathfrak{R};$$

$$(4.\,a)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau} = G\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau},\ \text{auf der Fläche } (\tau.);\ [\text{vgl. die Bemerk. p. 116}];$$

$$(4.\,b)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau_0} = 0;\ \text{auf der Fläche } (\tau_0).$$

Durch diese Bedingungen (3.), (4. a, b) *ist die Function* Φ *völlig bestimmt bis auf ein additives nur noch von der Zeit abhängendes Glied;* wie Analoges schon bei den Gleichungen (8.), (9.) p. 115 bemerkt wurde. Uebrigens können wir diesen Satz, da wir gegenwärtig immer nur einen *gegebenen einzelnen* Zeitaugenblick in Betracht ziehen, mithin die Zeit als eine *gegebene Constante* ansehen, und folglich jedwede *nur von der Zeit* abhängende Function ebenfalls als eine *Constante* zu bezeichnen haben, auch so aussprechen: *Die Function* Φ *ist durch die Bedingungen* (3.), (4. a, b) *völlig bestimmt bis auf eine additive Constante.*

Es handelt sich nun darum, die diesen Bedingungen (3.), (4. a, b) entsprechende Function Φ wirklich zu berechnen. Bezeichnet man die dipolaren Coordinaten des variablen Punctes (x, y, z) mit $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$, so wird den Bedingungen (3.) Genüge geschehen, wenn man Φ z. B.

$$(5.)\qquad = \sqrt{\psi}\, e^{N\vartheta} P_n(\cos\omega), \quad \text{oder } = \sqrt{\psi}\, e^{-N\vartheta} P_n(\cos\omega)$$

setzt, wo n eine beliebige ganze Zahl und $N = n + \frac{1}{2}$ sein soll. Dies ergiebt sich nämlich unmittelbar aus den Sätzen (39.), (40.) p. 113, falls man nur beachtet, dass die beiden Pole A und A' *ausserhalb* des von der Flüssigkeit occupirten Raumes $\mathfrak{R}$ sich befinden. — Demgemäss wird also jenen Bedingungen (3.) z. B. auch genügt werden, wenn man für Φ irgend ein Aggregat der Functionen (5.) nimmt, mithin setzt:

$$(6.)\qquad \Phi = \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n e^{N\vartheta} + B_n e^{-N\vartheta})\, P_n(\cos\omega),$$

wo A_n, B_n *Constante* sind. Es handelt sich nun darum, diese noch disponiblen Constanten A_n, B_n der Art zu wählen, dass gleichzeitig auch den Bedingungen (4. a, b) Genüge geschieht. Zu diesem Zwecke müssen wir die Formel (6.) nach ϑ differenziren, wobei zu beachten ist, dass ϑ auf der *rechten* Seite der Formel *doppelt* vorkommt, nämlich erstens *explicite*, und zweitens insofern, als es in

$$(7.)\qquad \psi = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega, \quad [\text{vgl. (15.) p. 104}]$$

enthalten ist. In Folge dieses Umstandes ist die Ausführung der Differentiation ein wenig mühsam.

Zur Erleichterung derselben wollen wir zunächst an Stelle der Formel (6.) folgende nehmen:

$$(\alpha.)\qquad F = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

wo nach wie vor

$(\beta.)$ $\qquad \psi = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega,$ und ausserdem $\mu = \cos\omega$

sein soll. Wir erhalten alsdann:

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} N A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu) - \frac{i\sin i\vartheta}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu).$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit $\sqrt{\psi}$, und mit Rücksicht auf $(\beta.)$:

$$\sqrt{\psi}\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = (2\cos i\vartheta - 2\mu)\sum_{n=0}^{n=\infty} N A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu) - i\sin i\vartheta\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

oder anders geordnet:

$$\sqrt{\psi}\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} 2 N A_n e^{N\vartheta}\mu P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{n=\infty}(2N\cos i\vartheta - i\sin i\vartheta) A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu).$$

Das allgemeine Glied der *letzten* Summe kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$\left((2n+1)\frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2} + \frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}\right) A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

oder auch so:

$$\left((n+1)e^{\vartheta} + n e^{-\vartheta}\right) A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

oder endlich auch so:

$$\left(n A_n e^{(N-1)\vartheta} + (n+1) A_n e^{(N+1)\vartheta}\right) P_n(\mu).$$

Somit folgt:

$$(\gamma.)\qquad \sqrt{\psi}\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)(2n+1) A_n e^{N\vartheta}\mu P_n(\mu)$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(n A_n e^{(N-1)\vartheta} + (n+1) A_n e^{(N+1)\vartheta}\right) P_n(\mu.).$$

Von diesen beiden Reihen schreitet die letztere fort nach den $P_n(\mu)$, die erste hingegen nach den *Producten* $\mu P_n(\mu)$. Doch kann man eine nach diesen Producten fortlaufende Reihe leicht umwandeln in eine nach den blossen $P_n(\mu)$ fortgehende, und zwar mittelst der allgemeinen Formel:

$$(\delta.)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n\mu P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{n}{2n-1}C_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3}C_{n+1}\right) P_n(\mu).$$

in welcher die C *beliebige* Constanten sein dürfen.

Bringt man diesen Hülfsatz (δ.), dessen Beweis zu Ende dieses § nachträglich gegeben werden soll, auf jene *erste* Reihe der Formel (γ.) in Anwendung, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)\left(\frac{n}{2n-1}(2n-1)A_{n-1}e^{(N-1)\vartheta}+\frac{n+1}{2n+3}(2n+3)A_{n+1}e^{(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu).$$

oder, was dasselbe, folgende Gestalt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(-nA_{n-1}e^{(N-1)\vartheta}-(n+1)A_{n+1}e^{(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu).$$

Dies in (γ.) substituirt, erhält man:

$$(\varepsilon).\quad \sqrt{\psi}\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(n(A_n-A_{n-1})e^{(N-1)\vartheta}-(n+1)(A_{n+1}-A_n)e^{(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu),$$

oder, falls man mit $\sqrt{\psi}$ dividirt, und zugleich für F seine eigentliche Bedeutung (α.) substituirt:

$$(\zeta.)\quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty}A_ne^{N\vartheta}P_n(\mu)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(n(A_n-A_{n-1})e^{(N-1)\vartheta}-(n+1)(A_{n+1}-A_n)e^{(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu).$$

Man kann aus dieser Formel eine *neue* Formel ableiten durch Vertauschung von ϑ mit $-\vartheta$, wobei ψ ungeändert bleibt [vgl. (β.)] Multiplicirt man dabei zugleich die ganze Formel mit -1, und vertauscht überdiess die A mit irgend welchen andern Constanten B, so erhält man:

$$(\eta.)\quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty}B_ne^{-N\vartheta}P_n(\mu)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(-n(B_n-B_{n-1})e^{-(N-1)\vartheta}+(n+1)(B_{n+1}-B_n)e^{-(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu).$$

Diese allgemeinen Formeln (ζ.) *und* (η.), *in denen die* A *und* B *beliebige Constante vorstellen, können nun sofort in Anwendung gebracht werden, um den Ausdruck* Φ (6.) *nach* ϑ *zu differenziren.* Man erhält alsdann:

$$(8.)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\begin{matrix}+n(A_n-A_{n-1})e^{(N-1)\vartheta}-(n+1)(A_{n+1}-A_n)e^{(N+1)\vartheta}\\-n(B_n-B_{n-1})e^{-(N-1)\vartheta}+(n+1)(B_{n+1}-B_n)e^{-(N+1)\vartheta}\end{matrix}\right\}P_n(\mu$$

Ausserdem ist, um die Bedingungen (4. a, b) wirklich hinzustellen, noch das $\frac{\partial x}{\partial\vartheta}$ zu berechnen. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass der Werth von x:

$$x=-2a\frac{i\sin i\vartheta}{\psi},\ \text{wo}\ \psi=2\cos i\vartheta-2\cos\omega\ \text{ist},\quad [\text{vgl. p. 102}],$$

folgendermassen geschrieben werden kann:

$$x = -2a\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi}}\right),$$

oder, falls man für den Quotienten $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ die Reihe (35. a, b) p. 110 substituirt, auch folgendermassen:

$$x = -2a\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N\vartheta}P_n(\mu)\right).$$

Hieraus folgt sofort:

$$x = 2a\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} Ne^{-N\vartheta}P_n(\mu);$$

und hieraus folgt weiter mittelst der allgemeinen Formel (η.):

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(-n[N-(N-1)]e^{-(N-1)\vartheta} + (n+1)[(N+1)-N]e^{-(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu),$$

$$(9.)\qquad \text{d. i. } \frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(-ne^{-(N-1)\vartheta} + (n+1)e^{-(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu).$$

Substituirt man jetzt endlich die Werthe (8.), (9.) *in die Bedingungs-Gleichungen* (4. a, b), so verwandelt sich, wie man leicht übersieht, jede dieser beiden Bedingungs-Gleichungen in die Anforderung, dass eine gewisse nach den $P_n(\mu)$ fortschreitende Reihe $= 0$ sein soll. Hieraus aber folgt, dass die Coefficienten dieser $P_n(\mu)$ einzeln $= 0$ sind. Somit gelangt man zu folgenden Relationen:

$$(10.\text{a})\quad \left\{\begin{matrix} +n(A_n - A_{n-1})e^{(N-1)\varkappa} & -(n+1)(A_{n+1} - A_n)e^{(N+1)\varkappa} \\ -n(B_n - B_{n-1})e^{-(N-1)\varkappa} & +(n+1)(B_{n+1} - B_n)e^{-(N+1)\varkappa} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 2aG\left[-ne^{-(N-1)\varkappa} + (n+1)e^{-(N+1)\varkappa}\right],$$

$$(10.\text{b})\quad \left\{\begin{matrix} +n(A_n - A_{n-1})e^{(N-1)\varkappa_0} & -(n+1)(A_{n+1} - A_n)e^{(N+1)\varkappa_0} \\ -n(B_n - B_{n-1})e^{-(N-1)\varkappa_0} & +(n+1)(B_{n+1} - B_n)e^{-(N+1)\varkappa_0} \end{matrix}\right\} = 0,$$

wobei $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Mittelst dieser Formeln (10. a, b) *hat man nun die Coefficienten* A, B *zu berechnen. Substituirt man sodann die in solcher Weise für diese* A, B *erhaltenen Werthe in den Ausdruck* Φ (6.), *so wird hiemit die Berechnung des Geschwindigkeitspotentials* Φ *vollendet sein.*

Nachträglicher Beweis des Hülfsatzes (δ.) p. 119. — Zu den bekannten recurrenten Eigenschaften der Kugelfunctionen $P_n(\mu)$ gehört unter Anderm auch die Formel:

$$(\text{a}).\qquad (2n+1)\,\mu P_n(\mu) = nP_{n-1}(\mu) + (n+1)\,P_{n+1}(\mu);$$

vgl. *F. Neumann's Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, Verlag von Teubner, 1878, p. 61, Nr. (I.). Aus dieser Formel folgt für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ der Reihe nach:

$$\text{(b.)} \qquad \begin{array}{rl|l} 1\mu P_0(\mu) = & 0 + 1P_1(\mu), & C_0 \\ 3\mu P_1(\mu) = & 1P_0(\mu) + 2P_2(\mu), & \frac{1}{3}C_1 \\ 5\mu P_2(\mu) = & 2P_1(\mu) + 3P_3(\mu), & \frac{1}{5}C_2 \\ 7\mu P_3(\mu) = & 3P_2(\mu) + 4P_4(\mu), & \frac{1}{7}C_3 \\ & \text{etc. etc. etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Multiplicirt man aber diese Gleichungen (b.) mit den danebengesetzten Factoren, wo die C *beliebige* Werthe haben dürfen, und addirt, so erhält man:

$$\text{(c.)} \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \mu P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} D_n P_n(\mu),$$

wo die Grössen D die Bedeutungen haben:

$$\text{(d.)} \qquad \begin{aligned} D_0 &= 0 + \tfrac{1}{3}C_1, \\ D_1 &= \tfrac{1}{1}C_0 + \tfrac{2}{5}C_2, \\ D_2 &= \tfrac{2}{3}C_1 + \tfrac{3}{7}C_3, \\ D_3 &= \tfrac{3}{5}C_2 + \tfrac{4}{9}C_4, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Diese Formeln (d.) lassen sich offenbar zusammenfassen in die *eine* Formel:

$$\text{(f.)} \qquad D_n = \frac{n}{2n-1} C_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} C_{n+1}, \quad \text{wo } n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Substituirt man aber diesen Werth von D_n in die Formel (c.), so erhält man den in Rede stehenden Hülfssatz (δ.) p. 119. — *Q. e. d.*

§ 9.

Fortsetzung und gleichzeitige Einschränkung auf einen specielleren Fall.

Die Berechnung der Constanten A, B aus den Gleichungen (10. a, b) ist leider mit grossen Schwierigkeiten verbunden, die im Wesentlichen darin bestehen, dass (wenigstens scheinbar) die Anzahl der Gleichungen zur Bestimmung jener Constanten *nicht* ausreicht.

Um diese Schwierigkeiten deutlicher hervortreten zu lassen, und um die in Rede stehende Rechnung wenigstens für irgend einen speciellen Fall wirklich durchführen zu können, wollen wir annehmen, *der Parameter* τ_0 *sei* $= 0$ *gegeben*. Alsdann wird die Kugelfläche (τ_0) eine *Ebene*, nämlich die *yz-Ebene* sein.

In diesem Specialfall $\tau_0 = 0$ wird offenbar die Gleichung (10. b) erfüllt, wenn man

$$(11.)\quad \begin{gathered} B_0 = A_0 + C, \quad B_1 = A_1 + C, \quad B_2 = A_2 + C, \quad \text{etc. etc.} \\ \text{allgemein: } B_n = A_n + C \end{gathered}$$

setzt, wo das C eine beliebige Constante sein kann. Gleichzeitig nimmt alsdann die Formel (10. a) die Gestalt an:

$$n(A_n - A_{n-1})(e^{(N-1)\tau} - e^{-(N-1)\tau}) - (n+1)(A_{n+1} - A_n)(e^{(N+1)\tau} - e^{-(N+1)\tau}) =$$
$$= 2aG[-ne^{-(N-1)\tau} + (n+1)e^{-(N+1)\tau}],$$

oder, falls man mit $(-e^{-(N+1)\tau})$ multiplicirt:

$$-n(A_n - A_{n-1})e^{-2\tau}(1 - e^{-(2N-2)\tau}) + (n+1)(A_{n+1} - A_n)(1 - e^{-(2N+2)\tau}) =$$
$$= 2aG[n - (n+1)e^{-2\tau}]e^{-2N\tau}.$$

Führt man nun den ächten Bruch $q = e^{-\tau}$ ein [vgl. (2.) p. 117], und beachtet, dass $2N = 2n + 1$ ist, so erhält man:

$$-nq^2(1 - q^{2n-1})(A_n - A_{n-1}) + (n+1)(1 - q^{2n+3})(A_{n+1} - A_n) =$$
$$= 2aG[n - (n+1)q^2]\,q^{2n+1}.$$

Setzt man nun hier endlich n der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man zur Bestimmung der A folgendes System von Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{aligned} &&+1(1-q^3)(A_1 - A_0) &= 2aG(0 - q^2)q, \\ -1q^2(1-q)(A_1 - A_0) &&+ 2(1-q^5)(A_2 - A_1) &= 2aG(1 - 2q^2)q^3, \\ -2q^2(1-q^3)(A_2 - A_1) &&+ 3(1-q^7)(A_3 - A_2) &= 2aG(2 - 3q^2)q^5, \\ -3q^2(1-q^5)(A_3 - A_2) &&+ 4(1-q^9)(A_4 - A_3) &= 2aG(3 - 4q^2)q^7, \\ &&\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Wäre A_0 bekannt, so könnte man aus der *ersten* dieser Gleichungen das A_1, sodann aus der *zweiten* das A_2, aus der *dritten* das A_3 berechnen, u. s. w. Jenes A_0 ist aber unbekannt; *und es scheint daher zur wirklichen Bestimmung der A's noch eine Gleichung zu fehlen.* Diese noch fehlende Gleichung wird durch den Umstand geliefert, dass die Reihe (6.) für das Geschwindigkeitspotential Φ convergent sein soll. Denn hieraus folgt, dass A_n mit wachsendem n gegen 0 convergiren muss, oder kürzer ausgedrückt, dass

$$(13.)\qquad A_\infty = 0$$

ist. *Diese Gleichung* (13.) *zu den Gleichungen* (12.) *hinzugefügt, werden wir jetzt die A's in der That zu berechnen im Stande sein.*

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(14.)\qquad Q_n = 1 - q^n \quad \text{und} \quad \Delta_n = A_n - A_{n-1},$$

so lauten die Gleichungen (12.) folgendermassen:

$$
(15.)\quad
\begin{array}{rl|l}
& + 1 Q_3 \Delta_1 = 2aG(0 - q^2)q, & q^0 Q_1 \\
- 1 q^2 Q_1 \Delta_1 & + 2 Q_5 \Delta_2 = 2aG(1 - 2q^2)q^3, & q^{-2} Q_3 \\
- 2q^2 Q_3 \Delta_2 & + 3 Q_7 \Delta_3 = 2aG(2 - 3q^2)q^5, & q^{-4} Q_5 \\
- 3q^2 Q_5 \Delta_3 & + 4 Q_9 \Delta_4 = 2aG(3 - 4q^2)q^7, & q^{-6} Q_7 \\
& \text{etc. etc. etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit den beigesetzten Factoren:

$$
(16.)\quad
\begin{array}{rl}
& + 1q^0 Q_1 Q_3 \Delta_1 = 2aGq(0 - q^2)Q_1 = R_0, \\
- 1q^0 Q_1 Q_3 \Delta_1 & + 2q^{-2} Q_3 Q_5 \Delta_2 = 2aGq(1 - 2q^2)Q_3 = R_1, \\
- 2q^{-2} Q_3 Q_5 \Delta_2 & + 3q^{-4} Q_5 Q_7 \Delta_3 = 2aGq(2 - 3q^2)Q_5 = R_2, \\
- 3q^{-4} Q_5 Q_7 \Delta_3 & + 4q^{-6} Q_7 Q_9 \Delta_4 = 2aGq(3 - 4q^2)Q_7 = R_3, \\
& \text{etc. etc. etc.}
\end{array}
$$

wo die R_0, R_1, R_2, R_3, ... als Abbreviaturen dienen sollen für die *rechten Seiten* dieser Gleichungen. — Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nun durch successives Addiren:

$$
(17.)\quad
\begin{aligned}
1q^0 Q_1 Q_3 \Delta_1 &= R_0, \\
2q^{-2} Q_3 Q_5 \Delta_2 &= R_0 + R_1, \\
3q^{-4} Q_5 Q_7 \Delta_3 &= R_0 + R_1 + R_2, \\
4q^{-6} Q_7 Q_9 \Delta_4 &= R_0 + R_1 + R_2 + R_3, \\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

wo noch für die R ihre eigentlichen Bedeutungen, d. i. die *rechten Seiten* der Formeln (16.) zu substituiren sind. Mit Rücksicht auf (14.) sind also diese Bedeutungen der R folgende:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 2aGq(0 - q^2)(1 - q) = 2aGq(0 - q^2 - 0 + q^3), \\
R_1 &= 2aGq(1 - 2q^2)(1 - q^3) = 2aGq(1 - 2q^2 - q^3 + 2q^5), \\
R_2 &= 2aGq(2 - 3q^2)(1 - q^5) = 2aGq(2 - 3q^2 - 2q^5 + 3q^7), \\
R_3 &= 2aGq(3 - 4q^2)(1 - q^7) = 2aGq(3 - 4q^2 - 3q^7 + 4q^9), \\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

woraus durch successive Addition sich ergiebt:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 2aGq(0 - q^2 + q^3), \\
R_0 + R_1 &= 2aGq(1 - 3q^2 + 2q^5), \\
R_0 + R_1 + R_2 &= 2aGq(3 - 6q^2 + 3q^7), \\
R_0 + R_1 + R_2 + R_3 &= 2aGq(6 - 10q^2 + 4q^9), \\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

Substituirt man also diese R's in (17.), und substituirt man daselbst gleichzeitig auch für die Q's und Δ's ihre Werthe aus (14.), so erhält man:

$$
(18.)\quad
\begin{aligned}
A_1 - A_0 &= 2aG\,\frac{q(0 - q^2 + q^3)}{1(1-q)(1-q^3)},\\
A_2 - A_1 &= 2aG\,\frac{q^3(1 - 3q^2 + 2q^5)}{2(1-q^3)(1-q^5)},\\
A_3 - A_2 &= 2aG\,\frac{q^5(3 - 6q^2 + 3q^7)}{3(1-q^5)(1-q^7)},\\
A_4 - A_3 &= 2aG\,\frac{q^7(6 - 10q^2 + 4q^9)}{4(1-q^7)(1-q^9)},\\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

oder, falls man in Partialbrüche zerlegt:

$$
(19.)\quad
\begin{aligned}
A_1 - A_0 &= aG\left(\;0\; - \frac{2q^3}{1-q^3}\right),\\
A_2 - A_1 &= aG\left(\frac{1q^3}{1-q^3} - \frac{3q^5}{1-q^5}\right),\\
A_3 - A_2 &= aG\left(\frac{2q^5}{1-q^5} - \frac{4q^7}{1-q^7}\right),\\
A_4 - A_3 &= aG\left(\frac{3q^7}{1-q^7} - \frac{5q^9}{1-q^9}\right),\\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

Und hiezu tritt noch die Formel (13.):

$$
(20.)\qquad A_\infty = 0.
$$

Addirt man jetzt alle Gleichungen (19.) ins Unendliche hin, so wird die Summe der *linken Seiten* $= A_\infty - A_0$, also, nach (20.), $= -A_0$. Und man erhält also:

$$
-A_0 = aG\left(-\frac{q^3}{1-q^3} - \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} - \frac{q^9}{1-q^9} - - \cdots\right).
$$

Nachdem in solcher Weise A_0 gefunden ist, ergeben sich jetzt A_1, A_2, A_3, ... der Reihe nach aus den Gleichungen (19.). Man erhält:

$$
(21.)\quad
\begin{aligned}
A_0 &= aG\left(+\frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^7}{1-q^7} + \frac{q^9}{1-q^9} + \frac{q^{11}}{1-q^{11}} + \cdots\right),\\
A_1 &= aG\left(-\frac{1q^3}{1-q^3} + \left[\frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^7}{1-q^7} + \frac{q^9}{1-q^9} + \frac{q^{11}}{1-q^{11}} + \cdots\right]\right),\\
A_2 &= aG\left(-\frac{2q^5}{1-q^5} + \left[\frac{q^7}{1-q^7} + \frac{q^9}{1-q^9} + \frac{q^{11}}{1-q^{11}} + \cdots\right]\right),\\
A_3 &= aG\left(-\frac{3q^7}{1-q^7} + \left[\frac{q^9}{1-q^9} + \frac{q^{11}}{1-q^{11}} + \cdots\right]\right),\\
A_4 &= aG\left(-\frac{4q^9}{1-q^9} + \left[\frac{q^{11}}{1-q^{11}} + \cdots\right]\right),\\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

woraus, beiläufig bemerkt, folgt:

(22.) $$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots = 0.$$

Uebrigens kann man offenbar sämmtliche Formeln (21.) ersetzen durch die *eine* Formel:

(23.) $$A_n = aG\left(-\frac{nq^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} + \left[\frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}} + \frac{q^{2n+5}}{1-q^{2n+5}} + \frac{q^{2n+7}}{1-q^{2n+7}} + \cdots\right]\right).$$

Da nun $q = e^{-\tau}$ ein positiver ächter Bruch, mithin

$$\frac{q^p}{1-q^p} = q^p + q^{2p} + q^{3p} + q^{4p} + \cdots = \sum_{j=1}^{j=\infty} q^{jp}$$

ist, so kann man die Formel (23.) auch so schreiben:

(24.) $$A_n = aG\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(-nq^{(2n+1)j} + \left[q^{(2n+3)j} + q^{(2n+5)j} + q^{(2n+7)j} + \cdots\right]\right),$$

oder auch so:

(25.) $$A_n = aG\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(-nq^{(2n+1)j} + \frac{q^{(2n+3)j}}{1-q^{2j}}\right).$$

Es bleibt noch übrig die Werthe der A und B in dem Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials Φ

$$\Phi = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(A_n e^{N\vartheta} + B_n e^{-N\vartheta}\right) P_n(\mu), \quad \text{[vgl. (6.) p. 118]}$$

zu substituiren. Substituirt man zuvörderst die Werthe der B:

$$B_n = A_n + C, \quad \text{[vgl. (11.) p. 123]},$$

so erhält man:

$$\Phi = C\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N\vartheta} P_n(\mu) + \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\left(e^{N\vartheta} + e^{-N\vartheta}\right) P_n(\mu),$$

wo die *erste* Summe $= \frac{1}{\sqrt{\psi}}$ ist [vgl. (35. a, b) p. 110]. Somit ergiebt sich:

(26.) $$\Phi = C + \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\left(e^{N\vartheta} + e^{-N\vartheta}\right) P_n(\mu), \text{ wo } \mu = \cos\omega.$$

Dies also ist der Werth des Geschwindigkeitspotentials Φ *im variablen Puncte* (x, y, z) *oder* $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$. *Dabei haben die* A *die in* (21.), resp. (23.), (25.) *angegebenen constanten Werthe, während* C *eine willkührliche Constante vorstellt.* Dabei ist das Wort „constant" stets in dem Sinne zu verstehen, der p. 118 exponirt wurde.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun in der Berechnung der *lebendigen Kraft* T *der Flüssigkeit.* Zu diesem Zwecke ist der Werth von

Φ (26.) in die Formel:

(27.) $$T = -\frac{\varrho G}{2}\iint \Phi \cos(R, x)\, d\sigma, \text{ [vgl. (14.) p. 116]},$$

einzusetzen, und sodann die Integration auszuführen. Um diese Integration zu erleichtern, ist es zweckmässig, den Ausdruck Φ (26.) zuvörderst einer gewissen *Transformation* zu unterwerfen.

§ 10.

Transformation des Geschwindigkeitspotentials.

Führt man in (25.) statt n die Zahl $N = n + \frac{1}{2}$ ein, so erhält man:

(a_0.) $$A_n = aG\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(-(N-\tfrac{1}{2})\, q^{2Nj} + \frac{q^{2j}}{1-q^{2j}}\, q^{2Nj}\right).$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen kann auch so geschrieben werden:

$$-Nq^{2Nj} + \frac{1}{2}\,\frac{1+q^{2j}}{1-q^{2j}}\, q^{2Nj},$$

oder, falls man für q seine eigentliche Bedeutung $q = e^{-\tau}$ substituirt, auch so:

$$-Ne^{-2Nj\tau} + \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-2j\tau}}{1-e^{-2j\tau}}\, e^{-2Nj\tau},$$

oder falls man zur Abkürzung $2j\tau = \beta$ setzt, auch so:

$$-Ne^{-N\beta} + \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\, e^{-N\beta},$$

oder (was dasselbe) auch so:

$$\frac{\partial e^{-N\beta}}{\partial \beta} + e^{-N\beta}\,\frac{\partial \log\sqrt{e^{\beta}+e^{-\beta}-2}}{\partial \beta},$$

oder endlich auch so:

$$\frac{1}{\sqrt{e^{\beta}+e^{-\beta}-2}}\;\frac{\partial\left[\left(\sqrt{e^{\beta}+e^{-\beta}-2}\right)e^{-N\beta}\right]}{\partial \beta}.$$

Somit ergiebt sich also aus (a_0.):

(b_0.) $$A_n = \sum_{j=1}^{j=\infty}\frac{aG}{\sqrt{e^{\beta}+e^{-\beta}-2}}\;\frac{\partial\left[\left(\sqrt{e^{\beta}+e^{-\beta}-2}\right)e^{-N\beta}\right]}{\partial \beta}, \text{ wo } \beta = 2j\tau \text{ ist.}$$

An Stelle von β kann man, falls es beliebt, auch die *entgegengesetzte* Grösse $\gamma = -\beta$ einführen. Man erhält alsdann:

(c_0.) $$A_n = \sum_{j=1}^{j=\infty}\frac{(-1)\,aG}{\sqrt{e^{\gamma}+e^{-\gamma}-2}}\;\frac{\partial\left[\left(\sqrt{e^{\gamma}+e^{-\gamma}-2}\right)e^{N\gamma}\right]}{\partial \gamma}, \text{ wo } \gamma = -2j\tau.$$

Substituirt man aber diese Werthe von A_n in die Formel (26):

$$\Phi = C + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sqrt{\psi} A_n e^{N\vartheta} P_n(\mu) + \sqrt{\psi} A_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu) \right),$$

und zwar der Art, dass man daselbst für das *erste* A_n den Werth ($b_{0'}$) für das *zweite* den Werth (c_0.) eintreten lässt, so erhält man eine Reihe:

$$(28.) \qquad \Phi = C + (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots + \Phi_j + \cdots),$$

deren allgemeines Glied Φ_j lautet:

$$(29.) \quad \Phi_j = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{aG\sqrt{\psi}}{\sqrt{e^\beta + e^{-\beta} - 2}} \dfrac{\partial \left[\left(\sqrt{e^\beta + e^{-\beta} - 2} \right) e^{-N\beta} \right]}{\partial \beta} e^{N\vartheta} P_n(\mu) \\ - \dfrac{aG\sqrt{\psi}}{\sqrt{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2}} \dfrac{\partial \left[\left(\sqrt{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2} \right) e^{N\gamma} \right]}{\partial \gamma} e^{N\vartheta} P_n(\mu) \end{array} \right\},$$

mithin auch so geschrieben werden kann:

$$(30.) \quad \Phi_j = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2a^2G}{\sqrt{e^\beta + e^{-\beta} - 2}} \dfrac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\sqrt{\psi}\sqrt{e^\beta + e^{-\beta} - 2}}{2a} e^{N(\vartheta - \beta)} P_n(\mu) \right) \\ - \dfrac{2a^2G}{\sqrt{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2}} \dfrac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\sqrt{\psi}\sqrt{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2}}{2a} e^{N(\gamma - \vartheta)} P_n(\mu) \right) \end{array} \right\};$$

wobei stets im Auge zu behalten ist, dass $\beta = 2j\tau$ und $\gamma = -2j\tau$ sein soll. *Durch die eigenthümliche Form des Ausdruckes* (30.) *wird man sofort zu gewissen geometrischen Betrachtungen hingedrängt;* denn man sieht sofort, dass die daselbst auftretenden Summen (von $n = 0$ bis ∞ erstreckt) nichts Anderes sind als die Werthe der *reciproken Entfernungen* irgend welcher Punktpaare.

Um näher hierauf einzugehen, bemerken wir zuvörderst, dass der *variable* Punct (ϑ, ω, φ) *innerhalb* des von der Flüssigkeit occupirten schaalenförmigen Raumes $\mathfrak{R}$ liegen soll, und dass dieser Raum $\mathfrak{R}$ begrenzt ist von zwei ineinandergeschachtelten Kugelflächen (τ) und (τ_0). Demgemäss muss die Coordinate ϑ jenes variablen Punctes (ϑ, ω, φ) einen Werth haben, *der seiner Grösse nach stets zwischen τ und τ_0 bleibt.* Nun ist die Fläche (τ) eine wirkliche Kugel, deren Parameter τ *positiv* ist. Die Fläche (τ_0) hingegen ist identisch mit der yzEbene, mithin ihr Parameter τ_0 *gleich Null.* Und es muss daher die Coordinate ϑ jenes im Raume $\mathfrak{R}$ variirenden Punctes (ϑ, ω, φ) einen Werth besitzen, der stets zwischen dem *positiven* τ und dem *verschwindenden* τ_0 bleibt. Also die Formel:

$$(a.) \qquad \tau > \vartheta > \tau_0 = 0.$$

Hieraus aber folgt sofort *a fortiori*, dass auch folgende Formeln stattfinden:

(b.)
$$2\tau > \vartheta > -2\tau,$$
$$4\tau > \vartheta > -4\tau,$$
etc. etc.

Demgemäss erhalten wir allgemein:

(c.)
$$2j\tau > \vartheta > -2j\tau,$$

wo $j = 1, 2, 3, \ldots$ sein soll, oder was dasselbe ist:

(d.)
$$\beta > \vartheta > \gamma.$$

Markirt man also *auf der xAxe* zwei Puncte

$$(\vartheta_\beta,\ \omega_\beta,\ \varphi_\beta,\ \psi_\beta) \quad \text{und} \quad (\vartheta_\gamma,\ \omega_\gamma,\ \varphi_\gamma,\ \psi_\gamma),$$

deren ω- und ϑCoordinaten die Werthe haben sollen:

(e.)
$$\begin{cases}\omega_\beta = 0, \\ \vartheta_\beta = \beta, \ \text{d. i.} = 2j\tau,\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega_\gamma = 0, \\ \vartheta_\gamma = \gamma, \ \text{d. i.} = -2j\tau,\end{cases}$$

und bezeichnet man diese beiden Puncte kurzweg mit β und γ, ferner ihre reciprocen Abstände von dem variablen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ respective mit T_β und T_γ, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (d.):

(f.)
$$\psi_\beta = e^\beta + e^{-\beta} - 2, \ \text{und} \ T_\beta = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_\beta}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta-\beta)} P_n(\mu),$$
$$\psi_\gamma = e^\gamma + e^{-\gamma} - 2, \ \text{und} \ T_\gamma = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_\gamma}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\gamma-\vartheta)} P_n(\mu),$$

[vgl. (15.) p. 104 und (37.a, b.) p. 110]

wo wiederum $\mu = \cos\omega$ sein soll. Mittelst dieser Formeln (f.) aber gewinnt der Ausdruck (30.) folgende Gestalt:

(31.)
$$\Phi_j = \frac{2a^2G}{\sqrt{\psi_\beta}} \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} - \frac{2a^2G}{\sqrt{\psi_\gamma}} \frac{\partial T_\gamma}{\partial \gamma}.$$

Nachträglich wird es nun gut sein unsere provisorischen Bezeichnungen durch etwas *genauere* zu ersetzen. Wir wollen nämlich fortan die Puncte β und γ respective mit $2j$ und $2j+1$ bezeichnen, und die Coordinaten derselben mit den entsprechenden Indices versehen, desgleichen auch die T's. Die Formel (31.) geht alsdann über in:

(32.)
$$\Phi_j = \frac{2a^2G}{\sqrt{\psi_{2j}}} \frac{\partial T_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} - \frac{2a^2G}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{\partial T_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}}.$$

Dies aber in (28.) substituirt, erhält man für das *Geschwindigkeitspotential* selber den Werth:

(33.)
$$\Phi = C + 2a^2G\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \frac{1}{\sqrt{\psi_5}}\frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} + - \cdots\right);$$

und diese Formel repräsentirt die auszuführende Transformation. Die hier auftretenden Puncte 2, 3, 4, 5 etc. liegen sämmtlich auf der x Axe, und haben nach (e.) die Coordinaten:

$$(34.)\qquad \begin{cases} \omega_{2j} = 0, \\ \vartheta_{2j} = 2j\tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{2j+1} = 0, \\ \vartheta_{2j+1} = -2j\tau, \end{cases}$$

oder ausführlicher geschrieben, die Coordinaten:

$$(35.)\qquad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \cdots\cdot = \textit{Null},$$

$$(36.)\qquad \begin{array}{ll} \vartheta_2 = 2\tau, & \vartheta_3 = -2\tau, \\ \vartheta_4 = 4\tau, & \vartheta_5 = -4\tau, \\ \vartheta_6 = 6\tau, & \vartheta_7 = -6\tau, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

Für unsere weiteren Betrachtungen wird es nun nothwendig sein, uns auf Grund der vorstehenden Formeln (35.), (36.) über die *Lage* all dieser *auf der x Axe befindlichen Puncte* 2, 3, 4, 5, 6, . . . eine deutliche Vorstellung zu verschaffen. Ist die ω Coordinate irgend eines auf der x Axe liegenden Punctes $= 0$, so folgt daraus sofort, dass der Punct *ausserhalb* der Strecke AA' sich befindet, [vgl. die Definiton von ω in Formel (8.) p. 100]. Somit folgt aus den vorstehenden Gleichungen (35.), dass all jene auf der x Axe befindlichen Puncte 2, 3, 4, 5, . . . *ausserhalb* der Strecke AA', also theils *oberhalb* A, theils *unterhalb* A' gelegen sein müssen.

Ferner stehen die geraden Puncte: 2, 4, 6, . . . in einfacher Beziehung zu den ungeraden: 3, 5, 7, . . . Sind nämlich irgend zwei Kugelflächen des dipolaren Systems gegeben mit den Parametern ϑ und $-\vartheta$, so sind beide Flächen von gleicher Grösse und *gegenseitige Spiegelbilder in Bezug auf die yz Ebene* (vgl. p. 100). Gleiches wird daher auch gelten von je zwei Puncten $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(-\vartheta, \omega, \varphi)$, d. i. von je zwei Puncten, deren ϑ Coordinaten *entgegengesetzte*, deren ω- und φ Coordinaten hingegen gleiche Werthe haben. Somit folgt aus den vorstehenden Formeln (35.), (36.), *dass 2 und 3, ebenso 4 und 5, ebenso 6 und 7 u. s. w. gegenseitige Spiegelbilder sind in Bezug auf die yz Ebene.*

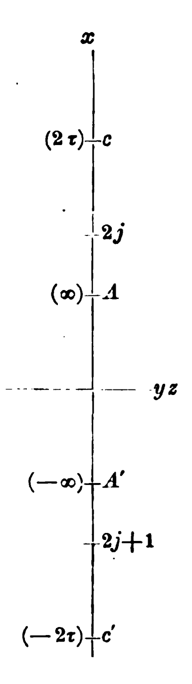
Wir wissen nun ferner, dass die *Centra* sämmtlicher Kugelflächen des dipolaren Systems auf der x Axe und ausserhalb der Strecke AA' liegen (vgl. p. 97, 98), dass mithin die ω Coordinaten all dieser Centra $= 0$ sind. Und überdiess wissen wir, dass für jede solche Kugelfläche die ϑ Coordinate des Centrums *doppelt so gross* ist als der Parameter der Fläche (vgl. d. Bemerkung p. 101). Demgemäss wird also

z. B. das Centrum c der gegebenen Kugelfläche (τ) die Coordinaten haben:

$$\omega_c = 0, \quad \vartheta_c = 2\tau.^*)$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (35.), (36.), *dass dieses Centrum c identisch ist mit dem dortigen Puncte* 2.

Lässt man nun einen variablen Punct längs der x Axe, vom Centrum c aus, sich allmählich herabsenken bis zum Pole A, so wird dabei seine x Coordinate *beständig abnehmen*, mithin seine ϑ Coordinate *beständig wachsen* (vgl. p. 103). Demgemäss wird also seine ϑ Coordinate bei der genannten Bewegung *vom Werthe* 2τ *aus fortwährend wachsen bis zum Werth* ∞, *während gleichzeitig seine* ω *Coordinate* $= 0$ *bleibt*, (denn die ganze Bewegung findet statt *ausserhalb* der Strecke AA'). Hieraus aber erkennen wir mit Rücksicht auf die Formeln (35.), (36.) sofort, dass jener von c nach A sich herabsenkende Punct während dieser Bewegung der Reihe nach die festen Puncte 2, 4, 6, 8, 10, ... passiren wird; und gelangen somit zu dem Satz, *dass all diese Puncte* 2, 4, 6, 8, ... *auf der* x Axe *zwischen c und A gelegen sind; woraus beiläufig auch folgt, dass all diese Puncte* 2, 4, 6, 8, ... *innerhalb der Kugelfläche* (τ) *sich befinden.* Denn sowohl c, wie auch A sind im Innern dieser Fläche (vgl. p. 97, 98).



Die *ungeraden* Puncte 3, 5, 7, 9, ... sind, wie schon bemerkt wurde, die Spiegelbilder von 2, 4, 6, 8, ... in Bezug auf die yz Ebene. Folglich liegen all diese ungeraden Puncte 3, 5, 7, 9, ... zwischen c' und A', falls man nämlich unter c' das Spiegelbild von c versteht.

Recapitulation. — *Sämmtliche Puncte* $2j$, *d. i.* 2, 4, 6, 8, ... *liegen innerhalb der gegebenen Kugelfläche* (τ), *und zwar zwischen c und A. Und andererseits liegen sämmtliche Puncte* $2j+1$, *d. i.* 3, 5, 7, 9, ... *ausserhalb jener Kugelfläche, nämlich unterhalb der yz Ebene, und zwar zwischen* c' *und* A'; *wie solches auch angedeutet ist in der vorstehenden Figur.*

Zusatz. — Die festen Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... liegen mithin alle im *Endlichen*. Die in der Formel (33.) vorkommenden Grössen

*) Demgemäss ist in der vorstehenden Figur dem Centrum c diese seine ϑ Coordinate: 2τ in Parenthese beigefügt; ebenso wie daselbst auch den Polen A und ihre ϑ Coordinaten, nämlich ∞ und $-\infty$ in Parenthese zugefügt sind.

$T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$ sind aber die reciprocen Entfernungen dieser festen Puncte von dem variablen Punct (ϑ, ω, φ) oder (x, y, z). Somit folgt aus jener Formel, dass Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ zu Null werden, sobald man den genannten variablen Punct (x, y, z) sich im Innern der Flüssigkeit nach irgend welcher Richtung hin ins Unendliche entfernen lässt. Oder mit andern Worten: Es ergiebt sich, dass die Geschwindigkeitscomponenten $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ an den unendlich fernen Stellen der Flüssigkeit, beständig Null bleiben, *dass also die Flüssigkeit selber, bei der hier betrachteten Bewegung, an ihren unendlich fernen Stellen beständig in Ruhe bleibt.* Und demgemäss wird also in der hier behandelten hydrodynamischen Aufgabe keine Aenderung eintreten, wenn wir uns die Flüssigkeit im Unendlichen von irgend einer *festen Fläche* begrenzt vorstellen, z. B. von einer um den Anfangspunct des Coordinatensystems (x, y, z) beschriebenen Kugelfläche. *Alsdann würde also der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$ innerlich begrenzt sein von der in Bewegung begriffenen Kugel, und äusserlich theils von der festen yzEbene, theils von einer ebenfalls festen Halbkugelfläche, deren Radius unendlich gross ist.*

Bemerkung. — Bedient man sich der von mir in meinem Werk (von 1862, über die nichtconcentrischen Kugelflächen) gebrauchten Ausdrucksweise, und betrachtet man gleichzeitig die yzEbene als eine unendlich grosse Kugelfläche, so kann man, zufolge der Formeln (35.), (36.) den Punct 3 denjenigen nennen, welcher zum Punct 2 oder c in Bezug auf die yzEbene *conjugirt* ist. Und desgleichen kann man alsdann weiter den Punct 4 als denjenigen bezeichnen, welcher zu 3 *conjugirt* ist in Bezug auf die gegebene Kugelfläche (τ.) Sodann wird man ferner den Punct 5 als *conjugirt* zu 4 in Bezug auf die yzEbene, und 6 als *conjugirt* zu 5 in Bezug anf die Kugelfläche (τ) zu bezeichnen haben. U. s. w. U. s. w. Der *Begriff der conjugirten Puncte* ist aber identisch mit dem Begriff der *Thomson'schen Spiegelbilder* (*electrical images*). Und man würde daher nach Thomson die Puncte 3, 5, 6, 7, 8, 9, ... als diejenigen charakterisiren können, welche aus dem Puncte c oder 2 sich ergeben durch alternirende Spiegelung an der yzEbene und an der Kugelfläche (τ).

§ 11.

Berechnung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit.

Substituirt man den Werth (33.):

$$\Phi = C + 2a^2 G\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right) \tag{37.}$$

in die Formel der lebendigen Kraft (27.):

$$T = -\frac{\varrho G}{2}\iint \Phi \cos(R, x)\, d\sigma, \tag{38.}$$

so erhält man sofort:

$$(39.)\quad T = -\varrho a^2 G^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial U_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial U_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial U_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right),$$

wo die U's die Bedeutungen haben:

$$(40.)\quad \begin{aligned} U_{2j} &= \iint T_{2j} \cos(R, x)\, d\sigma, \\ U_{2j+1} &= \iint T_{2j+1} \cos(R, x)\, d\sigma, \end{aligned}$$

wo die Integrationen sich hinerstrecken über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ der gegebenen Kugel (τ). Dabei bezeichnet R den nach einem solchen Element $d\sigma$ laufenden Kugel-Radius, und (R, x) den Winkel, den dieser Radius mit der *positiven* x-Axe macht. Ausserdem bezeichnen T_{2j} und T_{2j+1} in den Formeln (40.) die reciprocen Abstände des *variablen* Elementes $d\sigma$ von den im vorhergehenden §. näher besprochnen *festen* Puncten $2j$ und $2j + 1$.

Um die Integrale (40.) *zu berechnen, mag zuvörderst das allgemeinere Integral betrachtet werden*

$$(\alpha.)\quad U_p = \iint T_p \cos(R, x)\, d\sigma,$$

wo p einen ganz beliebig gegebenen festen Punct, mithin T_p den reciprocen Abstand dieses Punctes p vom Elemente $d\sigma$ vorstellen soll. Man gelangt alsdann zu folgendem Resultat.

$$(\beta.)\quad U_p = \frac{4\pi}{3} r_p \cos(r_p, x),\ \textit{falls p innerhalb der Kugelfläche liegt.}$$

$$(\gamma.)\quad U_p = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{r_p}\right)^3 r_p \cos(r_p, x),\ \textit{falls p ausserhalb derselben liegt.}$$

Dabei bezeichnet r_p die vom Kugelcentrum nach p laufende Linie, und (r_p, x) den Neigungswinkel dieser Linie gegen die positive x Axe.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung:

$$w = (R, x), \quad w_p = (r_p, x), \quad \gamma = (R, r_p),$$

und überdies $\mu = \cos w$ und $\mu_p = \cos w_p$, so ist bekanntlich:

$$T_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_p^{\,n}}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma),\ \text{falls } p \textit{ innerhalb} \text{ der Kugelfläche liegt.}$$

Ist nun φ das Azimuth des Elementes $d\sigma$, so wird $d\sigma = R^2 d\mu d\varphi$, so dass also das Integral (α.) die Gestalt erhält:

$$U_p = \iint T_p \cos(R, x)\, R^2 d\mu d\varphi = R^2 \iint T_p P_1(\mu)\, d\mu d\varphi;$$

denn es ist nach unseren Bezeichnungen $\cos(R, x) = \cos w = \mu$, mithin auch $= P_1(\mu)$. Durch Substitution des Werthes von T_p folgt daher:

$$U_p = R^2 \iint \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_p^{\,n}}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma)\right) P_1(\mu)\, d\mu d\varphi.$$

Und hieraus ergiebt sich mittelst der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen:

$$U_p = R^2 \left(\frac{r_p}{R^2}\right) P_1(\mu_p) \cdot \frac{4\pi}{3},$$

oder weil $P_1(\mu_p) = \mu_p = \cos w_p = \cos(r_p, x)$ ist:

$U_p = \frac{4\pi R^2}{3}\left(\frac{r_p}{R^2}\right)\cos(r_p, x)$, stets vorausgesetzt, dass p *innerhalb* d. Kugel.

Desgleichen wird man offenbar erhalten:

$U_p = \frac{4\pi R^2}{3}\left(\frac{R}{r_p^2}\right)\cos(r_p, x)$ falls p *ausserhalb* der Kugel liegt.

Dies aber sind die Formeln (β.) und (γ.). — *Q. e. d.*

Für die vorgelegten Integrale (40.) ergeben sich nun mittelst dieses Hülfssatzes (α.), (β.), (γ.) und mit Rücksicht auf die Recapitulation p. 131 die Werthe:

$$(41.)\quad \begin{aligned} U_{2j} &= \frac{4\pi}{3} r_{2j} \cos\pi = -\frac{4\pi}{3} r_{2j}, \\ U_{2j+1} &= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3 r_{2j+1} \cos\pi = -\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r_{2j+1}^2}, \end{aligned}$$

wo r_{2j} und r_{2j+1} Abstände der Puncte $2j$ und $2j+1$ vom Centrum der gegebenen Kugelfläche vorstellen. Aus (41.) folgt sofort:

$$(42.)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}}, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{8\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\left(\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3\frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die x Coordinaten der Puncte $c, 2j, 2j+1$ (Figur p. 131), resp. mit x_c, x_{2j}, x_{2j+1}, so ist $r_{2j} = x_c - x_{2j}$ und $r_{2j+1} = x_c - x_{2j+1}$. Demgemäss ergiebt sich mit Rücksicht auf p. 103:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{\partial x_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} = \frac{2a}{\psi_{2j}}, \\ \frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= -\frac{\partial x_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} = -\frac{2a}{\psi_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Somit gehen die Formeln (42.) über in:

$$(43.)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{8\pi a}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\right)^3, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{16\pi a}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3. \end{aligned}$$

Da die ϑ Coordinaten der Puncte $2j$ und $2j+1$ nach (34.) die Werthe haben: $2j\tau$ und $-2j\tau$, so ergiebt sich:

$$\psi_{2j} = \psi_{2j+1} = (e^{j\tau} - e^{-j\tau})^2, \qquad \text{[vgl. } (\alpha.) \text{ p. 103.]}$$

Nimmt man aber hiervon die positive Quadratwurzel, und beachtet dabei, dass j und τ beide *positiv* sind, so ergiebt sich:

$$\sqrt{\psi_{2j}} = \sqrt{\psi_{2j+1}} = e^{j\tau} - e^{-j\tau} = e^{j\tau}(1 - e^{-2j\tau}),$$

mithin:

$$(a.)\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\right)^3 = \left(\frac{e^{-j\tau}}{1 - e^{-2j\tau}}\right)^3.$$

Bringt man ferner die allgemeine Formel (ε.) p. 103:

$$E = \pm 2a \frac{e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_2}}{(e^{\vartheta_1} - 1)(e^{\vartheta_2} - 1)}$$

auf die Entfernungen R und r_{2j+1} in Anwendung, so folgt*):

$$(b.)\qquad \begin{aligned} R &= 2a \frac{e^{2\tau} - e^{\tau}}{(e^{2\tau} - 1)(e^{\tau} - 1)} = 2a \frac{e^{\tau}}{e^{2\tau} - 1}, \\ r_{2j+1} &= 2a \frac{e^{2\tau} - e^{-2j\tau}}{(e^{2\tau} - 1)(1 - e^{-2j\tau})} = 2a \frac{e^{2\tau}(1 - e^{-2(j+1)\tau})}{(e^{2\tau} - 1)(1 - e^{-2j\tau})}, \end{aligned}$$

und hieraus durch Division und Erhebung zur dritten Potenz

$$\left(\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3 = \left(\frac{e^{-\tau}(1 - e^{-2j\tau})}{1 - e^{-2(j+1)\tau}}\right)^3.$$

Hieraus aber, und aus (a.) ergiebt sich sofort:

$$(c.)\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3 = \left(\frac{e^{-(j+1)\tau}}{1 - e^{-2(j+1)\tau}}\right)^3.$$

Substituirt man jetzt die Werthe (a.), (c.) in (43.) so erhält man

$$(44.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}} \frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{8\pi a}{3}\left(\frac{e^{-j\tau}}{1 - e^{-2j\tau}}\right)^3 = -\frac{8\pi a}{3}\left(\frac{q^j}{1 - q^{2j}}\right)^3, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{16\pi a}{3}\left(\frac{e^{-(j+1)\tau}}{1 - e^{-2(j+1)\tau}}\right)^3 = +\frac{16\pi a}{3}\left(\frac{q^{j+1}}{1 - q^{2j+2}}\right)^3, \end{aligned}$$

wo $q = e^{-\tau}$ ist, ebenso wie früher [vgl. z. B. (2.) p. 117]. Substituirt man jetzt endlich die Werthe (44.) in den Ausdruck der lebendigen Kraft T (39.) so erhält man:

$$(45.)\qquad T = \varrho a^2 G^2 \frac{8\pi a}{3} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{q}{1-q^2}\right)^3 + \left(\frac{q^2}{1-q^4}\right)^3 + \left(\frac{q^3}{1-q^6}\right)^3 + \cdots \\ +2&\left(\frac{q^2}{1-q^4}\right)^3 + 2\left(\frac{q^3}{1-q^6}\right)^3 + 2\left(\frac{q^4}{1-q^8}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \right\}$$

---

*) Es ist nämlich r_{2j+1} die Entfernung des Punctes $2j+1$ vom Centrum c. Andererseits kann R angesehen werden als die Entfernung zwischen c und zwischen einem oberhalb c auf der xAxe liegenden Puncte, dessen ϑCoordinate $= \tau$ ist. Uebrigens kann man die erste der Formeln (b.) auf einfachere Art herleiten. Vgl. den Nachtrag am Schluss dieses §.

wo die Glieder der *ersten* Zeile von den Puncten $2j$, die der *zweiten* von den Puncten $2j+1$ herrühren. Diese Formel (45.) reducirt sich sofort auf:

$$(46.)\qquad T=\frac{\pi\varrho}{3}(2a)^3G^2\left\{\left(\frac{q}{1-q^2}\right)^3+3\left[\left(\frac{q^2}{1-q^4}\right)^3+\left(\frac{q^3}{1-q^6}\right)^3+\left(\frac{q^4}{1-q^8}\right)^3+\cdots\right]\right\}.$$

oder (was dasselbe) auf:

$$(47.)\qquad T=\frac{\pi\varrho}{3}(2a)^3G^2\left\{\left(\frac{q}{1-q^2}\right)^3+3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{q^{j+1}}{1-q^{2j+2}}\right)^3\right\}.$$

Nun hat der Kugelradius R nach (b.) p. 135 den Werth:

$$(\text{f.})\qquad R=\frac{2ae^{-\tau}}{1-e^{-2\tau}}=\frac{2aq}{1-q^2},\ \text{woraus folgt: } 2a=R\frac{1-q^2}{q}.$$

Substituirt man diesen Werth von $2a$ in (47.), so erhält man:

$$(48.)\qquad T=\frac{\pi\varrho}{3}R^3G^2\left\{1+3(1-q^2)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{q^j}{1-q^{2j+2}}\right)^3\right\}.$$

Verschiedene Darstellungen der lebendigen Kraft. — Bezeichnet man in (48.) den Ausdruck in den geschweiften Klammern mit F, und beachtet man, dass das G nur Abbreviatur ist für $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ [vgl. (6.) p. 115], so erhält man:

$$(49.)\qquad T=\frac{\pi\varrho}{3}R^3F\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2,$$

wo F den Werth hat:

$$(50.)\qquad F=1+3(1-q^2)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{q^j}{1-q^{2j+2}}\right)^3.$$

Demgemäss kann dieses F auch so dargestellt werden:

$$(51.)\quad F=1+3(1-q^2)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}q^{3j}(1+3q^{2j+2}+6q^{4j+4}+10q^{6j+6}+15q^{8j+8}+\cdots),$$

oder, mehr symmetrisch geschrieben, auch so:

$$(52.)\,F=1+3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{1.2}{2}q^{3j+3}+\frac{2.3}{2}q^{5j+5}+\frac{3.4}{2}q^{7j+7}+\frac{4.5}{2}q^{9j+9}+\cdots\right),$$

oder, was dasselbe, auch so:

$$(53.)\qquad F=1+3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}q^{(2n+1)(j+1)}\right),$$

oder falls man jetzt die Summation j ausführt, auch so:

$$(54.)\qquad F=1+3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\frac{(q^{2n+1})^2}{1-q^{2n+1}}\right).$$

Man kann schliesslich die Function F entwickeln nach Potenzen von q, und erhält alsdann eine Reihe:

$$(A.)\qquad F = 1 + 3q^3 - 9q^5 + 3q^6 + 18q^7 - 9q^8 - 27q^9 + \cdots\cdot,$$

deren Coefficienten kein besonders einfaches Gesetz darbieten. Hieraus folgt z. B.:

$$(B.)\qquad \frac{dF}{dq} = 9q^2 - 45q^4 + 18q^5 + \cdots$$

mithin:

$$(C.)\qquad \frac{q^2}{1-q^2}\frac{dF}{dq} = 9q^4 - 36q^6 + 18q^7 + \cdots\cdot$$

Bemerkung. Mittelst der Formel (50.) ergiebt sich leicht, dass sowohl F, wie auch $\frac{dF}{dq}$ *stets positiv* sind, falls man nur beachtet, dass q ein *positiver ächter Bruch* ist. Man kann nämlich jene Formel (50.) auch so schreiben:

$$(\alpha.)\qquad F = 1 + 3\,(\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 + \cdots + \varphi_j^3 + \cdots),$$

wo alsdann φ_j die Bedeutung hat:

$$(\beta.)\qquad \varphi_j = \frac{(1-q^2)\,q^j}{1-q^{2j+2}}.$$

Dieses φ_j lässt sich offenbar auch so schreiben:

$$\varphi_j = \frac{q^j}{1+q^2+q^4+q^6+\cdots+q^{2j}}.$$

und hieraus folgt:

$$\frac{1}{\varphi_j} = q^{-j} + q^{2-j} + q^{4-j} + \cdots + q^{j-4} + q^{j-2} + q^j$$

oder etwas anders geordnet:

$$\frac{1}{\varphi_j} = (q^j + q^{-j}) + (q^{j-2} + q^{2-j}) + (q^{j-4} + q^{4-j}) + \cdots\cdots,$$

wo das *letzte* Glied $= (q^2 + q^{-2} + 1)$ oder $= (q^1 + q^{-1})$ ist, jenachdem j gerade oder ungerade. Hieraus folgt durch Differentiation nach q:

$$(\gamma.)\left(\frac{1}{\varphi_j}\right)^2\frac{d\varphi_j}{dq} = j\,\frac{1-q^{2j}}{q^{j+1}} + (j-2)\frac{1-q^{2j-4}}{q^{j-1}} + (j-4)\frac{1-q^{2j-8}}{q^{j-3}} + \cdots + \lambda\,\frac{1-q^{2\lambda}}{q^{\lambda+1}},$$

wo das $\lambda = 2$ oder $= 1$ ist, jenachdem j gerade oder ungerade.

Da nun q ein positiver ächter Bruch ist, so ergiebt sich aus (β.), (γ.), dass φ_j und $\frac{d\varphi_j}{dq}$ *stets positiv* sind. Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (α.), dass Gleiches auch gilt von F und $\frac{dF}{dq}$. — *Q. e. d.*

Nachtrag. — Ein Blick auf die frühere Figur p. 97 zeigt, dass daselbst $(c\alpha)$ mittlere Proportionale ist zwischen (cA) und (cA'):

$$(f.)\qquad (c\alpha) = \sqrt{(cA)(cA')}.$$

Dieses $(c\alpha)$ repräsentirt aber, wie jene Figur zeigt, *den Radius R derjenigen Kugelfläche des dipolaren Systems, deren Centrum in c liegt;* während andererseits die *rechte* Seite der Formel (f.) bezeichnet werden kann als das geometrische Mittel ξ der beiden Polabstände des Punctes c. Die Formel (f.) nimmt daher die Gestalt an $R = \xi$, d. i.

$$(g.)\qquad R^2 = \xi^2 = 4a^2\psi^{-1}, \quad \text{[vgl. (25.) p. 105.]}$$

Hieraus aber folgt, wenn man für die ψCoordinate des Centrums c ihren analytischen Ausdruck substituirt:

$$(h.)\qquad R^2 = 4a^2e^{\vartheta}(e^{\vartheta} - 1)^{-2}, \quad \text{[vgl. }(\alpha.)\text{, p. 103]},$$

wo das ϑ die ϑCoordinate des Centrums c vorstellt. Diese ϑCoordinate ist bekanntlich aber doppelt so gross als der *Parameter* der in Rede stehenden Kugelfläche [vgl. die Bemerkung p. 101]. Bezeichnet man also diesen Parameter mit τ, so ergiebt sich:

$$(i.)\qquad R^2 = 4a^2e^{2\tau}(e^{2\tau} - 1)^{-2}.$$

Und hieraus folgt:

$$(k.)\qquad \begin{cases} R = 2ae^{\tau}(e^{2\tau} - 1)^{-1}, & \text{falls } \tau \text{ positiv,} \\ R = 2ae^{\tau}(1 - e^{2\tau})^{-1}, & \text{falls } \tau \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Also der Satz: *Denkt man sich irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems vom Parameter τ gegeben, so wird der Radius R dieser Fläche den in* (k.) *genannten Werth besitzen.* Und hiemit steht in Einklang der vorhin (b.) p. 135 für R gegebene Ausdruck.

§ 12.

Die Resultante der von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübten Druckkräfte.

Die Oberfläche der betrachteten Kugel hat den Parameter $\vartheta = \tau$. Folglich ist die ϑCoordinate ihres Mittelpuncts $= 2\tau$ (Satz p. 101). Demgemäss ergiebt sich für die xCoordinate dieses Mittelpunctes der Werth:

$$(55.)\qquad \mathfrak{x} = a\,\frac{e^{2\tau}+1}{e^{2\tau}-1} = a\,\frac{1+q^2}{1-q^2}, \quad \text{[vgl. }(\beta.)\text{ p. 103]}.$$

Andererseits hat der Radius R der Kugel den Werth:

$$(56.)\qquad R = \frac{2aq}{1-q^2}, \quad \text{[vgl. (f.) p. 136]}.$$

Aus (55.), (56.) folgt durch Division:

$$(57.)\qquad \frac{\mathfrak{x}}{R} = \frac{1+q^2}{2q},$$

und hieraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$\frac{1}{R}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -\frac{1-q^2}{2q^2}\frac{dq}{dt},$$

oder was dasselbe ist:

(58.) $$\frac{dq}{dt} = -\frac{2q^2}{1-q^2}\frac{1}{R}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}.$$

Nun hat auch (49.) die *lebendige Kraft T der Flüssigkeit* den Werth:

$$T = \frac{\pi\varrho}{3}R^3 F\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2,$$

wo F nur von q abhängt, während ϱ (die Dichtigkeit der Flüssigkeit) und R (der Kugelradius) Constanten sind. Durch Differentiation nach der Zeit erhält man also:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi\varrho}{3}R^3\left(\frac{dF}{dq}\frac{dq}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2F\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right),$$

oder, falls man für $\frac{dq}{dt}$ den Ausdruck (58.) substituirt:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi\varrho}{3}R^3\left(-\frac{1}{R}\frac{2q^2}{1-q^2}\frac{dF}{dq}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^3 + 2F\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right).$$

Substituirt man aber diesen Werth in die früher gefundene Formel:

(59.) $$X^p = -X^j - \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^{-1}\frac{dT}{dt},$$ [vgl. (7.) p. 115],

so erhält man:

(60.) $$X^p = -X^j + \frac{2\pi\varrho}{3}R^2\frac{q^2}{1-q^2}\frac{dF}{dq}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}R^3 F\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2},$$

wo q den Werth hat:

(61.) $$q = \frac{\mathfrak{x} - \sqrt{\mathfrak{x}^2 - R^2}}{R}.$$

Dieser Werth nämlich ergiebt sich sofort aus der Gleichung (57.), falls man nur beachtet, dass q ein *positiver ächter Bruch* ist. Wir haben somit folgenden Satz:

Die incompressible Flüssigkeit befinde sich auf derjenigen Seite der yzEbene, auf welcher die positive xAxe liegt, und sei äusserlich begrenzt theils von der festen yzEbene selber theils von einer ebenfalls festen Halbkugelfläche, die um den Anfangspunct des Coordinatensystems mit unendlich grossem Radius beschrieben ist (vgl. den Zusatz p. 131). *Im Innern der Flüssigkeit befinde sich eine Kugel, deren Mittelpunct auf der xAxe liegt, und längs dieser Axe frei beweglich ist.*

Auf dieses aus Kugel und Flüssigkeit bestehende materielle System mögen von Aussen her gegebene Kräfte einwirken. Und zwar mag die Summe der xComponenten der die Kugel sollicitirenden äussern Kräfte

mit X, andererseits das Potential der die Flüssigkeit *sollicitirenden äussern Kräfte mit $V = V(x, y, z)$ bezeichnet sein. Ueberdiess sei der Anfangszustand der Kugel und ebenso der der Flüssigkeit in beliebiger Weise gegeben, jedoch letzterer als ein* wirbelfreier.

Alsdann ergiebt sich für die Bewegung der Kugel die Differentialgleichung:

$$M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p, \tag{62.}$$

wo M die Masse der Kugel, $\mathfrak{x}$ die x-Coordinate ihres Mittelpunctes, und X^p die x-Componente derjenigen Wirkungen vorstellt, welche auf die Kugel ausgeübt werden durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit.

Bezeichnet man nun den Radius der Kugel mit R, die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit ϱ, setzt man ferner

$$q = \frac{\mathfrak{x} - \sqrt{\mathfrak{x}^2 - R^2}}{R}, \tag{63.}$$

und versteht man endlich unter F oder $F(q)$ die auf p. 136 *besprochene Function, so hat die in Rede stehende Componente X^p den Werth:*

$$X^p = - X^j + \frac{2\pi\varrho}{3} R^3 \frac{q^2}{1 - q^2} \frac{dF}{dq} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \frac{2\pi\varrho}{3} R^3 F \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}. \tag{64.}$$

Dabei repräsentirt X^j die dem Princip des Archimedes entsprechende Kraft, nämlich die x-Componente derjenigen Wirkung, welche die dem Potential V entsprechenden äusseren Kräfte auf die Kugel ausüben würden, *falls die Materie der Kugel identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit.*

Die Componente X^p besteht also im Ganzen aus *drei Theilen.* Der *erste* Theil ist $= - X^j$, der *zweite* proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit der Kugel, und der *dritte* proportional mit der Beschleunigung der Kugel.

Da q ein positiver ächter Bruch ist, ferner F und $\frac{dF}{dq}$ stets positiv sind (Bemerkung p. 137), so ergiebt sich aus (64.) sofort, dass der *zweite* Theil der Kraft X^p ebenfalls stets *positiv, also von solcher Art ist, als fände zwischen der Kugel und der festen Wand* (der yz-Ebene) *eine gegenseitige Abstossung statt.* Andrerseits ergiebt sich aus (64.), dass der *dritte* Theil von X^p *negativ* oder *positiv* ist, je nachdem die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$ einen *positiven* oder *negativen* Werth hat, *dass mithin dieser* dritte *Theil von X^p als eine Kraft zu bezeichnen ist, welche der augenblicklichen Beschleunigung der Kugel jederzeit* entgegen *arbeitet.*

Der ächte Bruch q (63.) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man nämlich den Anfangspunct des Coordinatensystems mit o, den Mittelpunct der Kugel mit c, und legt man von o aus eine

Tangente op an die Kugel (p der Berührungspunkt), so ist offenbar (ocp) ein bei p rechtwinkliges Dreieck. Bezeichnet man die Seiten dieses Dreiecks mit (oc), (op) und (cp), so kann man die Formel (63.) auch so schreiben:

$$q = \frac{(oc) - (op)}{(cp)}.$$

Aus dem genannten Dreieck (opc) ergiebt sich aber sofort: $(op) = (oc)\cos\varkappa$ und $(cp) = (oc)\sin\varkappa$, wo $\varkappa$ den Innenwinkel des Dreiecks bei o vorstellt. Somit folgt:

$$q = \frac{(oc) - (oc)\cos\varkappa}{(oc)\sin\varkappa} = \frac{1 - \cos\varkappa}{\sin\varkappa},$$

oder kürzer:

$$(65.) \qquad q = \operatorname{tang}\frac{\varkappa}{2}.$$

Der hier eingeführte Winkel $\varkappa$ kann etwa bezeichnet werden als *der sphärische Radius des von o aus an die Kugel gelegten Tangentenkegels.* Dieser Winkel $\varkappa$ variirt offenbar zwischen 0^0 und 90^0, mithin q selber, nach (65.), zwischen 0 und 1. Es wird nämlich $\varkappa = 0^0$, und q ebenfalls $= 0$, sobald die Kugel längs der gegebenen x-Axe ins Unendliche aufsteigt. Und andrerseits wird $\varkappa = 90^0$, mithin $q = 1$, sobald sich die Kugel herabsenkt bis zur Berührung mit der yz-Ebene.

Nehmen wir nun an, die Kugel sei *sehr weit* von der yz-Ebene entfernt, so sind $\varkappa$ und q *äusserst klein.* Und demgemäss nimmt alsdann die Formel (64.) mit Rücksicht auf (A.), (B.), (C.) p. 137 folgende Gestalt an:

$$(66.) \qquad X^p = -X^j + \frac{2\pi\varrho}{3}R^2(9q^4 - 36q^6 + 18q^7 + \cdots)\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2$$
$$- \frac{2\pi\varrho}{3}R^3(1 + 3q^3 - 9q^5 + 3q^6 + 18q^7 + \cdots)\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}.$$

Somit folgt in erster Annäherung:

$$(67.) \qquad X^p = -X^j + \frac{2\pi\varrho}{3}R^2\cdot 9q^4\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}R^3(1 + 3q^3)\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2},$$

oder weil das q, wie aus (63.) sich ergiebt, in erster Annäherung $= \frac{R}{2\mathfrak{x}}$ ist:

$$(68.) \qquad X^p = -X^j + \frac{3\pi\varrho}{8}\frac{R^6}{\mathfrak{x}^4}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}R^3\left(1 + \frac{3R^3}{8\mathfrak{x}^3}\right)\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}.$$

Hieraus ersieht man z. B., dass der *zweite* Theil von X^p umgekehrt proportional ist mit der vierten Potenz der Entfernung $\mathfrak{x}$ des Kugelmittelpunctes von der festen Wand.

Lässt man endlich $\mathfrak{x}$ *unendlich gross* werden, so folgt aus (68.):

$$(69.) \qquad X^p = -X^j - \frac{2\pi\varrho}{3}R^3\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2};$$

so dass also in diesem Fall z. B. die Differentialgleichung (62.) die Gestalt annimmt:

$$(70.) \qquad \left(M + \frac{2\pi\varrho}{3} R^3\right) \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X - X^j;$$

was zufolge unserer früheren Untersuchungen *a priori* zu erwarten stand [vgl. (12.) p. 79 und (22.) p. 83].

Bemerkung. — Wir haben bei unserer Untersuchung gleich zu Anfang (p. 113) vorausgesetzt, die Kugel solle eine *bloss fortschreitende* Bewegung haben. Doch bleiben die erhaltenen Resultate offenbar auch dann noch in Kraft, wenn die Kugel, während ihr Mittelpunct längs der x-Axe fortgeht, um diesen Mittelpunct *in irgend welcher Drehung* begriffen ist. Dies ergiebt sich nämlich sofort, falls man beachtet, dass bei all unseren Betrachtungen die Reibung der Flüssigkeit (die innere wie die äussere) als Null vorausgesetzt wird.

Zweite Bemerkung. — Für den Specialfall, dass die von *Aussen* her auf das System einwirkenden Kräfte *Null* sind, wird $X = 0$, und ebenso auch $X^j = 0$; wodurch die Formeln (62.) und (59.) die einfachere Gestalt erhalten:

$$(\alpha.) \qquad M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X^p, \quad \text{und} \quad X^p = - \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^{-1} \frac{dT}{dt}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von X^p sofort:

$$(\beta.) \qquad M \frac{d\mathfrak{x}}{dt} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = - \frac{dT}{dt}.$$

Nun ist aber nach (49.)

$$(\gamma.) \qquad T = \Theta_{11} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2, \quad \text{wo } \Theta_{11} = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F \text{ ist},$$

und wo also Θ_{11} (ebenso wie F) lediglich von q, oder (was dasselbe) lediglich von $\mathfrak{x}$ abhängt. Substituirt man dieses T $(\gamma.)$ in die Formel $(\beta.)$, so folgt:

$$(\delta.) \qquad M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = - 2\Theta_{11} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} - \frac{\partial \Theta_{11}}{\partial \mathfrak{x}} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2.$$

Und dies ist dieselbe Formel, welche auf *anderm* Wege schon früher gefunden wurde [vgl. (53.) p. 91].

Ueber die Bewegung einer Kugel im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, welche äusserlich begrenzt ist von einer fest aufgestellten Kugelschaale.

§ 1.

Ueber einen neuen Weg zur Lösung der im vorhergehenden Abschnitt behandelten Aufgabe, unter Anwendung der Spiegelpuncte.

Es handelt sich um die *Bewegung einer Kugel im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, die äusserlich begrenzt sein soll von einer festaufgestellten Kugelfläche**); diese Aufgabe ist im vorhergehenden Abschnitt nur für den *speciellen* Fall absolvirt worden, dass jene äussere Kugelfläche eine *Ebene* ist. Obwohl es nun keinem Zweifel unterliegt, dass die dortige Methode auch zur Absolvirung des *allgemeinen* Falls geeignet und ausreichend sein werde, so erscheint es doch, bei der grossen Weitläufigkeit dieser Methode, sehr wünschenswerth, dieselbe durch einen *bequemeren* Weg zu ersetzen.

Eine gewisse Andeutung zur Auffindung eines solchen bequemeren Weges scheint gegeben zu sein durch das spontane Hereinbrechen der successiven Spiegelpuncte in den Gang unserer früheren Betrachtungen.**) In der That liegt, bei dem grossen Nutzen, den diese Puncte z. B. für die Lösung der *elektrostatischen* Probleme gewähren, der Gedanke nahe, dass ihr dortiges Auftauchen kein ganz zufälliges sein möchte, dass sie vielmehr für das vorliegende hydrodynamische Problem von derselben fundamentalen Bedeutung sein könnten, wie für jene Probleme

---

*) Genauer ist die Aufgabe angegeben auf p. 113, 114.

**) Vgl. die Bemerkung p. 132. Wenn ich damals diese Puncte (ebenso wie in meinem Werke von 1862 über die nichtconcentrischen Kugelflächen) als *conjugirte* Puncte bezeichnete, so scheint es mir *gegenwärtig* wohl angemessen, dieselben, nach ihrem eigentlichen Entdecker: *W. Thomson*, als *Spiegelpuncte*, resp. *elektrische Spiegelpuncte* (*Electrical images*) in meine weiteren Betrachtungen einzuführen, übrigens aber, je nach dem augenblicklichen Bedürfniss, bald den *einen*, bald den *andern* Namen anzuwenden.

der Elektrostatik. Hierüber nachdenkend, habe ich lange Zeit die *bekannten* Eigenschaften der Spiegelpuncte für die vorliegende hydrodynamische Aufgabe zn verwerthen gesucht, — jedoch ohne irgend welchen Erfolg; bis ich schliesslich durch weitere Ueberlegungen zu einer gewissen *neuen* Eigenschaft jener Puncte geleitet wurde, *mittelst deren in der That ein ausserordentlich bequemer und übersichtlicher Weg zur Lösung der in Rede stehenden Aufgabe sich eröffnet.*

Schwierig und wenig dankenswerth würde es sein, wenn ich die Ueberlegungen, die mich hiebei geleitet haben, und deren Gang im Allgemeinen mehr sprungweise als geradlinig verlaufen ist, wirklich mittheilen wollte. Und ich werde es daher vorziehen, in mehr synthetischer Weise zu verfahren, indem ich zuvörderst die bereits *bekannten* Eigenschaften der Spiegelpuncte in Kürze recapituliren, sodann die in Rede stehende *neue* Eigenschaft mittheilen und beweisen, und endlich von hier aus zur Lösung des hydrodynamischen Problems mich hinwenden werde.

§ 2.

Die Thomson'schen Spiegelpuncte. (Electrical Images.)

Es sei gegeben eine um den Punct c mit dem Radius R beschriebene Kugelfläche. Lässt man von c einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben zwei der Relation:

$$(c\alpha)(c\beta) = R^2 \tag{1.}$$

entsprechende Puncte α und β, so heisst jeder von diesen beiden Puncten das *Spiegelbild* des andern. Auch pflegt man zwei solche Puncte als *conjugirte* oder *correspondirende* Puncte zu bezeichnen. Liegt α *ausserhalb* der Kugelfläche, so kann man, wie aus (1.) sich leicht ergiebt, den conjugirten Punct β folgendermassen construiren: Man lege von α aus einen Tangentenkegel an die gegebene Kugel; alsdann ist β der Mittelpunct derjenigen Kreislinie, in welchem Kugel und Tangentenkegel einander berühren.

Erste Bemerkung. — Ist σ irgend ein Punct *auf* der gegebenen Kugelfläche, und lässt man α nach σ rücken, so wird [zufolge (1.)] der conjugirte Punkt β ebenfalls nach σ hinwandern. *Jeder auf der Kugelfläche liegende Punct σ hat daher zum Spiegelbilde sich selber.*

Zweite Bemerkung. — Liegt der Punct α in unendlicher Ferne, ist mithin $(c\alpha) = \infty$, so folgt aus (1.): $(c\beta) = 0$. *Jeder unendlich ferne Punct hat daher zu seinem Spiegelbilde das Centrum der gegebenen Kugelfläche.* Schon hieraus geht hervor, dass die in Rede stehenden Spiegelbilder im Allgemeinen *keine optischen* sind; was sich leicht bestätigt mittelst der betreffenden Formeln.

Ist nämlich α ein *leuchtender* Punct *ausserhalb* der Kugelfläche, ferner σ *der* Punct, in welchem die Kugelfläche von der Linie $c\alpha$ getroffen wird, und denkt man sich endlich auf dieser Fläche eine unendlich kleine Calotte f_σ markirt, deren Mittelpunct in σ liegen soll, so wird ein Theil der von α ausgehenden Strahlen von der Calotte f_σ reflectirt werden. Sucht man nun den virtuellen Brennpunct β dieser von f_σ reflectirten Strahlen näher zu bestimmen, so erhält man die Relation:

$$(\alpha.)\qquad \frac{1}{(c\alpha)} + \frac{1}{(c\beta)} = \frac{2}{R},$$

also eine Formel, die von der früheren Formel (1.) *wesentlich verschieden* ist. *Zwei jener früheren Formel* (1.) *entsprechende Puncte* α, β *sind also in der That keine optischen Spiegelbilder.* Sie können, weil ihre Anwendung namentlich in der Theorie der Electricität eine sehr wichtige und vielfache ist, nach dem Vorgange von *W. Thomson* etwa als *elektrische Spiegelbilder (Electrical Images)* bezeichnet werden. Der Kürze willen erscheint es indessen zweckmässig, das Epitheton „elektrisch" in der Regel fortzulassen.

Dritte Bemerkung. — Liegt α ausserhalb, mithin β innerhalb der Kugelfläche, und ist σ *der* Punct, in welchem diese Fläche von der Linie $c\beta\alpha$ getroffen wird, so kann die Formel (1.): $(c\alpha)\,(c\beta) = R^2$ auch so geschrieben werden:

$$(\beta.)\qquad \big(R + (\sigma\alpha)\big)\,\big(R - (\sigma\beta)\big) = R^2,$$

woraus folgt:

$$(\gamma.)\qquad (\sigma\alpha) - (\sigma\beta) = \frac{(\sigma\alpha)\,(\sigma\beta)}{R}.$$

Hieraus aber folgt für den *speciellen* Fall, dass $R = \infty$ ist, sofort:

$$(\delta.)\qquad (\sigma\alpha) = (\sigma\beta).$$

Somit sehen wir, dass für diesen speciellen Fall einer unendlich grossen Kugelfläche d. i. für den speciellen Fall der Ebene die Thomson'schen elektrischen Spiegelbilder identisch werden mit den optischen.

Vierte Bemerkung. — Uebrigens kann man für eine beliebig gegebene Kugelfläche, von *endlichem* Radius R, die *elektrische* Formel (1.), wie aus (γ.) ersichtlich, auch so schreiben:

$$(\eta.)\qquad (\sigma\alpha) - (\sigma\beta) = \frac{(\sigma\alpha)\,(\sigma\beta)}{R},$$

und gleichzeitig der in (α.) angegebenen *optischen* Formel folgende Gestalt verleihen:

$$(\varpi.)\qquad (\sigma\alpha) - (\sigma\beta) = \frac{2(\sigma\alpha)\,(\sigma\beta)}{R}.$$

Vergegenwärtigt man sich nun die gegebene Kugelfläche $\mathfrak{K}$, ferner die drei in gerader Linie liegenden Puncte c, σ, α, (α ausserhalb $\mathfrak{K}$), und denkt man sich um $c\sigma$, als *Durchmesser*, eine zweite Kugelfläche $\mathfrak{K}'$ construirt, so führen die vorstehenden Formeln (η.) und (ϖ.) sofort zu dem Satz, *dass das optische Spiegelbild des Punctes α für die Fläche $\mathfrak{K}$ identisch ist mit dem elektrischen Spiegelbild dieses Punctes α für die Fläche $\mathfrak{K}'$.*

Sind irgendwo im Raume zwei Puncte α und A gegeben, und bezeichnet man die (elektrischen) Spiegelbilder dieser Puncte für die gegebene Kugelfläche, deren Centrum c und deren Radius R heisst, respective mit β und B, so ist nach (1.):

$$(c\alpha)(c\beta) = (c\mathsf{A})(c\mathsf{B}) = R^2,$$

oder was dasselbe: $(c\alpha):(c\mathsf{A}) = (c\mathsf{B}):(c\beta)$; folglich:

$$\Delta(c\alpha\mathsf{A}) \sim \Delta(c\mathsf{B}\beta).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt die Proportionalität ihrer sämmtlichen Seiten, mithin die Formel:

$$(2.)\qquad \frac{(\alpha\mathsf{A})}{(\mathsf{B}\beta)} = \frac{(c\alpha)}{(c\mathsf{B})} = \frac{(c\mathsf{A})}{(c\beta)}.$$

Ist nun aber $u = v = w$, so wird auch $u = \sqrt{vw}$ sein. Somit ergiebt sich aus (2.) die weitere Formel:

$$\frac{(\alpha\mathsf{A})}{(\beta\mathsf{B})} = \frac{\sqrt{(c\alpha)(c\mathsf{A})}}{\sqrt{(c\beta)(c\mathsf{B})}},$$

oder was dasselbe:

$$(3.)\qquad \frac{(\alpha\mathsf{A})}{\sqrt{(c\alpha)(c\mathsf{A})}} = \frac{(\beta\mathsf{B})}{\sqrt{(c\beta)(c\mathsf{B})}}.$$

Die Formeln (1.) *und* (3.), *beide ausgezeichnet durch Symmetrie und Einfachheit, repräsentiren das Fundament unserer weiteren Betrachtungen.*

§ 3.

Die Theorie der Spiegelpuncte, bei Zugrundelegung der dipolaren Coordinaten.

In der früheren Figur p. 97 ist offenbar:

$$(cA)(cA') = (c\alpha)^2.$$

Zufolge (1.) sind daher in jener Figur die Puncte A und A' gegenseitige *Spiegelbilder* in Bezug auf eine um c mit dem Radius $(c\alpha)$ beschrieben gedachte Kugelfläche. Diese Fläche ist aber offenbar eine *beliebige* unter den Kugelflächen des *dipolaren Systems;* während gleichzeitig A und A' die beiden Pole dieses Systems vorstellen. Somit ergiebt sich also der Satz, *dass die beiden Pole A und A' gegenseitige Spiegelbilder sind für*

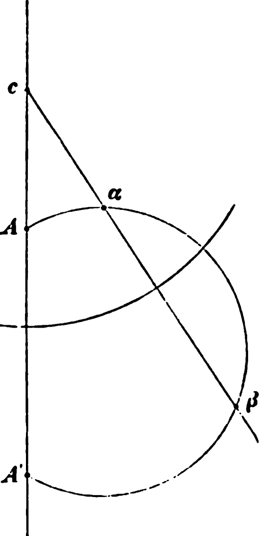
(4.) *jedwede Kugelfläche des dipolaren Systems;*

oder mit andern Worten, dass sie in Bezug auf jede solche Kugelfläche einander conjugirt sind.

Dies vorausgeschickt, stellen wir uns jetzt folgende Aufgabe: Es ist gegeben irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems mit dem Centrum c und dem Radius R. Ferner ist gegeben ein Punct α von ganz beliebiger Lage. Es soll das *Spiegelbild* von α für jene Kugelfläche ermittelt werden.

Zufolge des soeben bewiesenen Satzes (4.) sind die beiden Pole A und A' gegenseitige Spiegelbilder in Bezug auf die gegebene Kugelfläche; sodass also die Relation stattfindet:

(f.) $$(cA)(cA') = R^2.$$



Denkt man sich nun durch den gegebenen Punct α und die beiden Pole A, A' eine Kreisperipherie gelegt, und denjenigen Punct, in welchem diese Peripherie von der geraden Linie $c\alpha$ zum zweiten Mal geschnitten wird, mit β bezeichnet, so ist nach dem Secanten-Satz:

(g.) $$(cA)(cA') = (c\alpha)(c\beta).$$

Aus (f.) und (g.) folgt sofort:

(h.) $$(c\alpha)(c\beta) = R^2.$$

Hieraus aber ergiebt sich [mit Rücksicht auf (1.)], dass der Punct β das *gesuchte Spiegelbild* von α repräsentirt. Wir gelangen somit zu folgendem Satz: *Versteht man unter α einen ganz beliebig gegebenen Punct, ferner unter β das Spiegelbild von α in Bezug auf irgend*

(5.) *eine gegebene Kugelfläche des dipolaren Systems, so liegen α und β einerseits auf einer durch die beiden Pole gehenden Kreisperipherie, und andrerseits auf einer durch das Centrum c jener Kugelfläche gehenden geraden Linie.*

Solches constatirt ergiebt sich, mittelst des bekannten Satzes über die Peripheriewinkel eines Kreises, sofort:

$$\text{Winkel}\,(A\alpha A') = \text{Winkel}\,(A\beta A'), \qquad \text{[vgl. die Figur]},$$

also mit Rücksicht auf (8.) p. 100:

(6.) $$\omega_\alpha = \omega_\beta,$$

wo ω_α und ω_β die ω-Coordinaten der Puncte α und β vorstellen. Aber nicht nur zwischen diesen, sondern ebenso auch zwischen den ω- und $\mathfrak{z}$-Coordinaten der Puncte α, β finden *einfache Relationen* statt.

Sind, um näher hierauf einzugehen, α und A zwei ganz beliebig gegebene Puncte, ferner β und B die Spiegelbilder derselben in Bezug

auf eine *gegebene* Kugelfläche des dipolaren Systems, so gilt nach (3.) die Formel:

$$\text{(i.)} \qquad \frac{(\alpha \mathsf{A})}{\sqrt{(c\alpha)(c\mathsf{A})}} = \frac{(\beta \mathsf{B})}{\sqrt{(c\beta)(c\mathsf{B})}},$$

wo c das Centrum jener Kugelfläche repräsentirt. Zufolge des Satzes (4.) kann man hier für A und B z. B. die *beiden Pole* eintreten lassen, und zwar in doppelter Weise, indem man entweder A durch A, B durch A', oder umgekehrt A durch A' und B durch A ersetzt. Somit ergiebt sich einerseits:

$$\text{(k.)} \qquad \frac{(\alpha A)}{\sqrt{(c\alpha)(cA)}} = \frac{(\beta A')}{\sqrt{(c\beta)(cA')}},$$

und ebenso andererseits:

$$\text{(l.)} \qquad \frac{(\alpha A')}{\sqrt{(c\alpha)(cA')}} = \frac{(\beta A)}{\sqrt{(c\beta)(cA)}}.$$

Auch kann man z. B. in der Formel (i.) statt A, B setzen σ, σ, falls man unter σ einen Punct *auf* der gegebenen Kugelfläche versteht [vgl. die erste Bemerkung p. 144.] Alsdann erhält man:

$$\text{(m.)} \qquad \frac{(\alpha\sigma)}{\sqrt{(c\alpha)(c\sigma)}} = \frac{(\beta\sigma)}{\sqrt{(c\beta)(c\sigma)}}, \quad \text{d. i. } \frac{(\alpha\sigma)}{\sqrt{(c\alpha)}} = \frac{(\beta\sigma)}{\sqrt{(c\beta)}}.$$

Diese drei Formeln (k.), (l,), (m.) führen nun bei weiterer Behandlung zu einfachen und wichtigen Sätzen. Zuvörderst folgt aus (k.), (l.) durch *Division*:

$$\frac{(\alpha A)}{(\alpha A')}\frac{\sqrt{(cA')}}{\sqrt{(cA)}} = \frac{(\beta A')}{(\beta A)}\frac{\sqrt{(cA)}}{\sqrt{(cA')}},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\frac{(cA')}{(cA)} = \frac{(\alpha A')}{(\alpha A)}\frac{(\beta A')}{(\beta A)},$$

mithin:

$$\log\frac{(cA')}{(cA)} = \log\frac{(\alpha A')}{(\alpha A)} + \log\frac{(\beta A')}{(\beta A)},$$

also mit Rücksicht auf (5.) p. 99:

$$\text{(7.)} \qquad \vartheta_c = \vartheta_\alpha + \vartheta_\beta,$$

wo ϑ_c, ϑ_α, ϑ_β die ϑ-Coordinaten der Puncte c, α, β vorstellen.

Bei der Ableitung dieser Formel (7.) ist hinsichtlich der beiden Puncte α und β keine weitere Voraussetzung gemacht, als dass dieselben gegenseitige Spiegelbilder sind in Bezug auf die *gegebene Kugelfläche* vom Centrum c. Demgemäss können wir, unbeschadet der Gültigkeit der Formel, die Puncte α, β z. B. durch σ, σ ersetzen, indem wir unter σ irgend einen *auf* der Kugelfläche liegenden Punct

verstehen [vgl. die erste Bemerkung p. 144]. Die in solcher Weise entstehende Formel:

(7. a) $$\vartheta_c = 2\vartheta_\sigma \quad \text{oder} \quad \vartheta_\sigma = \tfrac{1}{2}\vartheta_c$$

lässt erkennen, dass die ϑ-Coordinate für *alle* auf der Kugelfläche liegenden Puncte σ *ein und denselben* Werth hat, nämlich halb so gross ist, als die ϑ-Coordinate des Kugelcentrums c. Dieser constante Werth, den ϑ auf der Kugelfläche besitzt, ist aber offenbar nichts Anderes als der sogenannte *Parameter* der Kugelfläche. Bezeichnet man also diesen Parameter mit τ, so ist nach (7. a):

(7. b) $$\vartheta_c = 2\vartheta_\sigma = 2\tau.$$

Wir kehren zurück zu den Formeln (k.), (l.), (m.). Aus (k.) und (l.) folgt durch *Multiplication*, und unter Fortlassung der sich dabei gegenseitig forthebenden Factoren:

$$\frac{(\alpha A)\,(\alpha A')}{(c\alpha)} = \frac{(\beta A)\,(\beta A')}{(c\beta)},$$

mithin auch:

$$\frac{\sqrt{(\alpha A)\,(\alpha A')}}{\sqrt{(c\alpha)}} = \frac{\sqrt{(\beta A)\,(\beta A')}}{\sqrt{(c\beta)}},$$

also mit Rücksicht auf (24.) p. 105:

(8.) $$\frac{\xi_\alpha}{\sqrt{(c\alpha)}} = \frac{\xi_\beta}{\sqrt{(c\beta)}},$$

wo ξ_α und ξ_β die ξ-Coordinaten der Puncte α und β vorstellen. Eine gewisse Aehnlichkeit mit dieser Formel (8.) besitzt die schon in (m.) notirte Formel:

(8. a) $$\frac{(\sigma\alpha)}{\sqrt{(c\alpha)}} = \frac{(\sigma\beta)}{\sqrt{(c\beta)}},$$

wo σ einen beliebigen Punct *auf* der Kugelfläche vorstellt. — Die Resultate der in diesem § angestellten Untersuchungen können schliesslich zusammengefasst werden in folgende drei Sätze:

I. Satz. — *Die beiden Pole A und A' sind einander conjugirt in Bezug auf jedwede Kugelfläche des dipolaren Systems;* [vgl. (4.).

II. Satz. — *Markirt man irgend eine specielle unter den genannten Kugelflächen, deren Centrum c und deren Parameter τ heissen mag, und versteht man unter α und β irgend zwei in Bezug auf diese Fläche (τ) einander conjugirte Puncte, so liegen α, β, c auf ein und derselben geraden Linie, und andrerseits α, β, A, A' auf ein und derselben Kreisperipherie;* [vgl. (5.)].

III. Satz. — *Gleichzeitig finden alsdann zwischen den* ω-, ϑ- *und* ξ-*Coordinaten der Puncte* α *und* β *die Relationen statt:*

(A.) $$\omega_\alpha = \omega_\beta, \qquad \text{[vgl. (6.)]},$$

(B.) $$\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = \vartheta_c = 2\vartheta_\sigma = 2\tau, \qquad \text{[vgl. (7.), (7. a), (7. b)]},$$

(C.) $$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \frac{\sqrt{(c\alpha)}}{\sqrt{(c\beta)}} = \frac{(\sigma\alpha)}{(\sigma\beta)}, \qquad \text{[vgl. (8.) und (8. a)]}.$$

Dabei bezeichnet c *das* **Centrum** *der gegebenen Fläche* (τ), *ferner* σ *einen variablen Punct auf dieser Fläche, also einen Punct, der auf der Fläche nach Belieben sich bewegen darf.*

Bemerkung. — Diese Sätze sind von mir bereits im Jahre 1862 in meiner mehrfach erwähnten Schrift über die nichtconcentrischen Kugelflächen aufgestellt worden; sie bilden das *wesentliche Fundament* der dort von mir entwickelten „geometrischen Methode". Sodann sind später im Jahre 1865 fast genau dieselben Sätze auch von Herrn Professor *Betti* publicirt worden. In der That dürfte die Uebereinstimmung zwischen *meinen* und den *Bettischen* Sätzen deutlich zu ersehen sein aus folgender Zusammenstellung, wobei von vornherein bemerkt sein mag, dass Betti statt meiner Buchstaben ϑ und ω respective u und v gebraucht hat.

1862.

Pag. 29, Nr. (24). — *Alle Puncte, für welche* ϑ (*oder* ω) *einen gegebenen constanten Werth hat, liegen auf einem Kreise, in dessen Centrum* ϑ (*respective* ω) *einen doppelt so grossen Werth besitzt.*

Pag. 30, Nr. (26. a, b, c). — *Ferner ergeben sich für irgend zwei Puncte* α *und* β, *die in Bezug auf eine gegebene* ϑ-*Kugelfläche conjugirt sind, folgende Sätze:*

Erstens. Die ω-*Coordinaten beider Puncte sind einander gleich; es ist also*

$$\omega_\alpha = \omega_\beta.$$

Oder was auf dasselbe hinauskommt: Beide Puncte liegen immer auf ein und derselben ω-*Curve.*

Zweitens. Die Summe der ϑ-*Coordinaten beider Puncte ist gleich der* ϑ-*Coordinate des Mittelpuncts der gegebenen Kugelfläche; es ist also, falls* γ *diesen Mittelpunct vorstellt:*

$$\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = \vartheta_\gamma.$$

1865.

Pag. 96. — *Il centro di una circonferenza* u $= \alpha$ *ha per coordinate:* u $= 2\alpha$, v $= 0$, *e il centro di una circonferenza* v $= \beta$, *ha per coordinate:* u $= 0$, v $= 2\beta$.

Pag. 98, Nr. 1°. — *Tra le coordinate* u, v *di un punto qualunque* m *e le coordinate* u′, v′ *del punto* m′ *reciproco ad* m *rispetto alla sfera di equazione* u $= \alpha$, *essistono le relazioni:*

$$\begin{cases} v' = v, \\ u + u' = 2\alpha. \end{cases}$$

Drittens. Die Parameter ξ der beiden Puncte verhalten sich zu einander wie die Quadratwurzeln der Abstände der Puncte vom Mittelpunct der gegebenen Kugelfläche; es ist also:

$$\xi_\alpha : \xi_\beta = \sqrt{(\alpha\gamma)} : \sqrt{(\beta\gamma)}$$

Viertens. Bezeichnet s einen beliebigen Punct auf der gegebenen Kugelfläche, also einen Punct, welcher keineswegs mit α und β in derselben Meridian-Ebene zu liegen braucht, so behält das Verhältniss der Abstände des Punctes s von den beiden festen Puncten α und β ein und denselben Werth, wie sich auch s auf der gegebenen Kugelfläche fortbewegen mag. Der Werth dieses Verhältnisses ist nämlich folgender:

$$(s\alpha) : (s\beta) = \sqrt{(\gamma\alpha)} : \sqrt{(\gamma\beta)},$$

oder auch (nach dem dritten Satz):

$$(s\alpha) : (s\beta) = \xi_\alpha : \xi_\beta,$$

wo ξ_α und ξ_β die Werthe vorstellen, welche der Parameter ξ in den festen Puncten α und β besitzt.

Pag. 99, Nr. 2°. — *I parametri ξ e ξ' di due punti* m *ed* m' *reciproci rispetto a una sfera* (u) *stanno tra loro come le radici quadrate delle distanze di questi medesimi punti dal centro* C *della sfera. Infatti ... abbiamo ..., onde:*

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{\sqrt{(\mathrm{Cm})}}{\sqrt{(\mathrm{Cm'})}}$$

Pag. 99, Nr. 3°. — *Le distanze di due punti reciproci rispetto ad una sfera* (u) *da un punto qualunque della medesima stanno tra loro come i respettivi parametri. Infatti, essendo* m *ed* m' *i due punti reciproci ed* S *un punto della sfera, abbiamo:*

$$\frac{(\mathrm{Sm})}{(\mathrm{Sm'})} = \frac{\sqrt{(\mathrm{Cm})}}{\sqrt{(\mathrm{Cm'})}},$$

$$= \frac{\xi}{\xi'}.$$

Ich würde auf diese im Jahre 1862 von mir aufgestellten vier Sätze, sowie auf die Einführung des mit ξ bezeichneten Parameters, vielleicht kein so grosses Gewicht legen, wenn diese Dinge nicht (wie schon gesagt) das *wesentliche Fundament* der damals von mir entwickelten „geometrischen Methode“ bildeten. Nun hat allerdings Herr Professor *Betti* an einer Stelle seines Aufsatzes*) von 1865 auch meiner Schrift von 1862 Erwähnung gethan, aber doch nur in ganz beiläufiger und höchst untergeordneter Weise. Denn er sagt daselbst (p. 97): *Le coordinate di un punto saranno ..., e potremo chiamarle coordinate dipolari col sig. Carlo Neumann, che se n'è servito utilmente per il problema della teorica del calore, analogo a quello che passiamo a trattare nella teoria dell' elettricità statica.* Auch dürfte es wenig sachgemäss sein, wenn Herr Professor *Betti*, wie aus diesen seinen Worten hervorzugehen scheint,

*) *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica.* (*Estratta dal Nuovo Cimento Vol.* XVIII, XIX, XX.), *Pisa.* 1865. Auf diese Schrift beziehen sich auch die oben angegebenen Seitenzahlen.

zwischen dem *Wärme-* und dem *Elektricitäts*-Problem einen wesentlichen Unterschied macht. Vielmehr sind in den Augen des Theoretikers beide Probleme der Hauptsache nach identisch. Ueberdiess habe ich in der Einleitung zu meiner Schrift (von 1862), und ebenso auch in Crelle's Journal (1862, Bd. 62, p. 36—49) noch ganz besonders exponirt, *in welcher Weise* man mittelst der von mir für das *Wärme*problem entwickelten Methoden, sofort auch zur Lösung des *electrischen* Problems gelangen könne.

Um die Wichtigkeit der in Rede stehenden vier Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, will ich nur erwähnen, dass mit Hülfe derselben die sogenannte *Green'sche Function* für den Fall *zweier Kugelflächen* sofort angebbar ist. In der That habe ich in meiner Schrift von 1862 [daselbst p. 39, No. (33.)] für die genannte Function, mittelst jener vier Sätze, den Ausdruck aufgestellt:

$$\frac{1}{\xi_p}\left[+(\xi_a T_{ax}+\xi_{a'}T_{a'x})-(\xi_b T_{bx}+\xi_{b'}T_{b'x})+-\cdots\right].$$

Später im Jahre 1865 ist Herr *Betti* auf genau demselben Wege (nämlich ebenfalls von jenen vier Sätzen aus) zu genau demselben Resultat gelangt, nämlich zu dem Ausdruck:

$$\frac{1}{\xi}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{\xi_s}{r_{sx}}+\frac{\xi_{s'}}{r_{s'x}}\right).$$

In der That unterscheidet sich dieser Betti'sche Ausdruck von dem meinigen nur dadurch, dass an Stelle des T seine eigentliche Bedeutung $\frac{1}{r}$ substituirt ist. [Vgl. den citirten Betti'schen Aufsatz p. 107].

§ 4.

Die successiven Spiegelbilder eines Punctes für zwei, respective mehrere Kugelflächen des dipolaren Systems.

Ist 1 ein beliebig gegebener Punct, und construirt man die durch 1 und die Pole A, A' gehende Kreisperipherie P, so liegen die Spiegelbilder von 1 für sämmtliche Kugelflächen des dipolaren Systems auf P; zufolge des II. Satzes p. 149. Auf ein solches Spiegelbild aber, es mag 2 heissen, können wir, *eben weil dasselbe auf P liegt*, dieselbe Schlussweise von Neuem anwenden und finden also, dass die Spiegelbilder von 2 für sämmtliche Kugelflächen des dipolaren Systems wiederum auf P liegen. Bezeichnet man nun ferner irgend eines dieser zuletzt erhaltenen Spiegelbilder mit 3, so ergiebt sich in derselben Weise, dass die Spiegelbilder von 3 für alle jene Kugelflächen wiederum auf P liegen. U. s. w. U. s. w.

Mit andern Worten: *Lässt man einen gegebenen Punct* 1 *beliebig oft, und jedesmal an einer beliebigen Kugelfläche des dipolaren Systems*

sich spiegeln, so werden all diese successiven Spiegelbilder auf ***ein und und derselben*** *Kreisperipherie liegen; und diese Peripherie ist diejenige, welche durch* 1 *und die beiden Pole* A, A' *geht.*

Aber auch die Lage dieser Bilder *auf* der Peripherie P ist geometrisch leicht angebbar, und zwar wiederum mittelst des II. Satzes p. 149. Um näher hierauf einzugehen, markiren wir irgend welche unter jenen Kugelflächen, bezeichnen die Parameter dieser markirten Flächen mit τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, ... die Flächen selber mit (τ_1), (τ_2), (τ_3), (τ_4), ..., und ihre (auf der xAxe liegenden) Centra mit c_1, c_2, c_3, c_4, ... Sodann bezeichnen wir das Spiegelbild des gegebenen Punctes 1 für die Fläche (τ_1) mit 2, das von 2 für (τ_2) mit 3, das von 3 für (τ_3) mit 4 u. s. w. u. s. w.; wie solches angedeutet werden mag durch das Schema:

$$(1.)\qquad 1 - (\tau_1) - 2 - (\tau_2) - 3 - (\tau_3) - 4 - (\tau_4) - 5 - \text{ etc. etc.}$$

Alsdann wissen wir bereits, dass all diese Bilder 2, 3, 4, 5, ... auf der durch 1 und A, A' gehenden Kreisperipherie P liegen. Was nun insbesondere ihre Lage *auf* dieser Peripherie P betrifft, so ergiebt sich dieselbe sofort mittelst des II. Satzes p. 149. So wird z. B. die gerade Linie $1c_1$ die Peripherie P, ausser in 1, noch in einem zweiten Punct schneiden; und dieser repräsentirt, zufolge jenes Satzes, das Bild 2. Ebenso schneidet die gerade Linie $2c_2$ die Peripherie P, ausser in 2, noch in einem neuen Punct; dieser repräsentirt das Bild 3. Ferner schneidet die Linie $3c_3$ jene Peripherie P, ausser in 3, noch in einem weitern Punct; dies ist das Bild 4. U. s. w. U. s. w.

Wir bringen jetzt die Formeln des III. Satzes p. 150 zur Anwendung auf die ω- und ϑ-Coordinaten der Puncte 1, 2, 3, 4, ... In solcher Weise ergeben sich, falls wir diese Coordinaten respective mit ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ... und ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ... bezeichnen, die Relationen:

$$(2.)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \text{ etc. etc.},$$

und ferner [mit Rücksicht auf das Schema (1.)] die Relationen:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \vartheta_1 + \vartheta_2 &= 2\tau_1, \\ \vartheta_2 + \vartheta_3 &= 2\tau_2, \\ \vartheta_3 + \vartheta_4 &= 2\tau_3, \\ \vartheta_4 + \vartheta_5 &= 2\tau_4, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Aus (3.) kann man, weil τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, und ϑ_1 als gegeben zu betrachten sind, die ϑCoordinaten der successiven Bilder des Punctes 1, nämlich ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ϑ_5, ... sofort berechnen. Man erhält:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \vartheta_2 &= 2\tau_1 - \vartheta_1, \\ \vartheta_3 &= 2\tau_2 - 2\tau_1 + \vartheta_1, \\ \vartheta_4 &= 2\tau_3 - 2\tau_2 + 2\tau_1 - \vartheta_1, \\ \vartheta_5 &= 2\tau_4 - 2\tau_3 + 2\tau_2 - 2\tau_1 + \vartheta_1, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Von diesen allgemeinen Betrachtungen steigen wir jetzt hinab zu etwas *specielleren Vorstellungen*, indem wir annehmen, es seien alle *ungeraden* τ einander gleich, und ebenso anderseits auch alle *geraden* τ. Den gemeinschaftlichen Werth der erstern nennen wir kurzweg τ, den der letztern τ_0. Also:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 = \tau_3 = \tau_5 = \tau_7 = \text{etc. etc.} \\ \tau_0 &= \tau_2 = \tau_4 = \tau_6 = \tau_8 = \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Auf diesen specielleren Fall, wo also im Ganzen nur *zwei* Flächen (τ) und (τ_0) vorhanden sind, lassen sich nun unsere allgemeinen Betrachtungen, mithin z. B. auch die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) ohne Weiteres übertragen.

Wir erhalten alsdann, von einem beliebig gegebenen Puncte 1 *ausgehend, wiederum unendlich viele Spiegelbilder* 2, 3, 4, 5, *etc. etc. und zwar nach folgendem Schema:*

$$(A.)\qquad 1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - 4 - (\tau_0) - 5 - (\tau) \text{ etc. etc.}$$

in welchem (τ) *und* (τ_0) *alterniren. Sodann erhalten wir für die* ω*-Coordinaten dieser Puncte* 1, 2, 3, 4, 5, *etc. die Relationen:*

$$(B)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \text{etc. etc.}$$

Ferner ergeben sich für die ϑ*-Coordinaten der Puncte die Relationen:*

$$(C.)\qquad \begin{aligned} \vartheta_1 + \vartheta_2 &= 2\tau, & \vartheta_2 + \vartheta_3 &= 2\tau_0, \\ \vartheta_3 + \vartheta_4 &= 2\tau, & \vartheta_4 + \vartheta_5 &= 2\tau_0, \\ \vartheta_5 + \vartheta_6 &= 2\tau, & \vartheta_6 + \vartheta_7 &= 2\tau_0, \\ &\text{etc. etc.} & &\text{etc. etc.} \end{aligned} \qquad \text{[abgeleitet aus (3.)].}$$

Und diese Relationen (C.) *können auch folgendermassen geschrieben werden:*

$$(D.)\qquad \begin{aligned} \vartheta_2 &= \quad 0 \quad + (2\tau - \vartheta_1), & \vartheta_3 &= -2(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\ \vartheta_4 &= 2(\tau - \tau_0) + (2\tau - \vartheta_1), & \vartheta_5 &= -4(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\ \vartheta_6 &= 4(\tau - \tau_0) + (2\tau - \vartheta_1), & \vartheta_7 &= -6(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\ \vartheta_8 &= 6(\tau - \tau_0) + (2\tau - \vartheta_1), & \vartheta_9 &= -8(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\ &\textit{etc. etc.} & &\textit{etc. etc.} \end{aligned}$$

[diese Formeln (D.) entsprechen den allgemeinen Formeln (4.)].

Mit besonderer Rücksicht auf unsere weiteren Untersuchungen, erscheint es angemessen, einige Beispiele zu betrachten:

Erstes Beispiel. — Der gegebene Punct 1 liege auf der x-Axe, und zwar *zwischen* den beiden Polen A und A'. Alsdann ist $\omega_1 = \pi$ [vgl. die Bemerkung bei (3.) p. 98]. Nach (B.) sind daher in diesem Falle auch $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$, etc. sämmtlich $= \pi$. Also:

$$(\mathrm{B}'.) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \text{etc. etc.} = \pi.$$

Und hieraus folgt, dass in diesem Fall nicht nur 1 selber, sondern ebenso auch 2, 3, 4, 5 etc. etc. auf der x-Axe und *zwischen* den beiden Polen A, A' gelegen sind. — Die übrigen Formeln (A.), (C.), (D.) sind in diesem Fall genau in derselben Weise wie früher zu wiederholen.

Zweites Beispiel. — Der gegebene Punct 1 liege wieder auf der x-Axe, diesmal aber *ausserhalb* der Strecke AA'. Alsdann ist $\omega_1 = 0$ [vgl. die Bemerkung bei (3.) p. 98]; sodass also nach (B.) auch $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$, etc. sämmtlich $= 0$ werden:

$$(\mathrm{B}''.) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \text{etc. etc.} = \mathit{Null}.$$

Hieraus folgt, dass in diesem Fall die Puncte 1, 2, 3, 4, 5 etc. etc. *sämmtlich* auf der x-Axe und sämmtlich *ausserhalb* der Strecke AA' sich befinden. — Die übrigen Formeln (A.), (C.), (D.) bleiben ungeändert dieselben.

Drittes Beispiel. — Der Punct 1 liege *in unendlicher Ferne*, übrigens aber *in beliebiger Richtung;* sodass also seine Coordinaten ϑ_1 und ω_1 beide $= 0$ sind [vgl. den Satz p. 106]. Ueberdies werde angenommen, dass die gegebene Kugelfläche (τ_0) *identisch sei mit der yz-Ebene,* mithin ihr Parameter $\tau_0 = 0$ sei [vgl. die Bemerkung bei (6.) p. 99]. In Folge dieser Annahmen ist also:

$$\vartheta_1 = \omega_1 = 0, \text{ und auch } \tau_0 = 0.$$

Demgemäss geht die Formel (A.) über in:

$$(\mathrm{A}'''.) \quad 1-(\tau)-2-(yz)-3-(\tau)-4-(yz)-5-(\tau)-6-(yz) \text{ etc.}$$

wo unter (yz) die yz-Ebene zu verstehen ist. Ferner geht (B.) über in:

$$(\mathrm{B}'''.) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \text{etc. etc.} = \mathit{Null}.$$

Sodann nehmen die Formeln (C.) folgende Gestalt an:

$$(\mathrm{C}'''.) \qquad \begin{array}{rr} \vartheta_2 = 2\tau, & \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0, \\ \vartheta_3 + \vartheta_4 = 2\tau, & \vartheta_4 + \vartheta_5 = 0, \\ \vartheta_5 + \vartheta_6 = 2\tau, & \vartheta_6 + \vartheta_7 = 0, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

und endlich die Formeln (D.) folgende:

$$(\mathrm{D}'''.) \qquad \begin{array}{ll} \vartheta_2 = 2\tau, & \vartheta_3 = -2\tau, \\ \vartheta_4 = 4\tau, & \vartheta_5 = -4\tau, \\ \vartheta_6 = 6\tau, & \vartheta_7 = -6\tau, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

Um übrigens in diesem Fall eine Vorstellung von der *Lage* der Bilder 2, 3, 4, 5 etc. zu erhalten, bedient man sich am Besten der Formel (A'''.),

Da nämlich 1 in unendlicher Ferne liegt, so folgt aus (A‴.) sofort, *dass 2 im Centrum der Fläche* (τ) *sich befindet* [vgl. die zweite Bemerkung p. 144]. Dies constatirt, folgt alsdann aus (A‴.) sofort, dass sämmtliche *folgenden* Bilder 3, 4, 5 etc. etc. auf der x-Axe liegen. Auch ergiebt sich aus (A‴.) noch insbesondere, dass 2 und 3 gegenseitige *optische* Spiegelbilder sind in Bezug auf die yz-Ebene, ebenso 4 und 5, ebenso 6 und 7; u. s. w. [vgl. die dritte Bemerkung p. 145].

Diese allgemeine Orientirung kann nun nachträglich mittelst der Formeln (B‴.), (C‴.), (D‴.) leicht controlirt und auch vervollständigt werden. So z. B. ergiebt sich aus (B‴.), dass all jene auf der x-Axe liegenden Puncte 1, 2, 3, 4, 5 etc. etc. *ausserhalb* der Strecke AA' sich befinden [vgl. die Bemerkung bei (3.) p. 98].

§ 5.

Eine neue Eigenschaft der Spiegelpuncte.

Um den Anfangspunct des Coordinatensystems (x, y, z) sei eine Kugelfläche vom Radius R beschrieben. Ferner seien *drei* Puncte gegeben, nämlich zwei *auf der positiven x-Axe liegende* Puncte α und β, von denen α *ausserhalb*, β *innerhalb* der Kugelfläche sich befindet, und drittens ein der Kugelfläche *äusserst nahe* gelegener Punct (x, y, z), dessen Polarcoordinaten (r, w, φ) heissen mögen:

$$\begin{aligned} x &= r\cos w, \\ y &= r\sin w\cos\varphi, \\ z &= r\sin w\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.}$$

Bezeichnet man die reciprocen Entfernungen dieses dritten Punctes von α und β respective mit T_α und T_β, so ergeben sich die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{r_\alpha^{n+1}} P_n(\cos w), \\ T_\beta &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_\beta^n}{r^{n+1}} P_n(\cos w), \end{aligned} \tag{2.}$$

wo r_α und r_β die Abstände der Puncte α und β vom Centrum der Kugel vorstellen. Aus diesen Formeln folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial r\,\partial r_\alpha} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\,\frac{r^{n-1}}{r_\alpha^{n+2}}\,P_n(\cos w), \\ g &= \frac{\partial^2 T_\beta}{\partial r\,\partial r_\beta} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\,\frac{r_\beta^{n-1}}{r^{n+2}}\,P_n(\cos w), \end{aligned} \tag{3.}$$

wo f und g als Abbreviaturen dienen sollen zur Bezeichnung der

linken Seiten dieser Formeln. Lässt man jetzt den Punct (r, w, φ) geradezu *auf* die gegebene Kugelfläche fallen, mithin $r = R$ werden, so folgt:

$$(4.)\quad \begin{aligned} F = (f)_{r=R} &= -\sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\frac{R^{n-1}}{r_\alpha^{n+2}} P_n(\cos w), \\ G = (g)_{r=R} &= -\sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\frac{r_\beta^{n-1}}{R^{n+2}} P_n(\cos w), \end{aligned}$$

wo F und G wiederum nur als Abbreviaturen dienen sollen. Offenbar können wir diese Formeln (4.) auch so schreiben:

$$(5.)\quad \begin{aligned} F &= -\left(\frac{1}{R}\right)^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\left(\frac{R}{r_\alpha}\right)^{n+2} P_n(\cos w), \\ G &= -\left(\frac{1}{r_\beta}\right)^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} n(n+1)\left(\frac{r_\beta}{R}\right)^{n+2} P_n(\cos w). \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt annehmen, *die beiden Puncte α, β seien gegenseitige Spiegelbilder in Bezug auf die gegebene Kugelfläche.* Alsdann ist [nach (1.) p. 144]:

$$(6.)\quad r_\alpha r_\beta = R^2, \text{ mithin: } \frac{R}{r_\alpha} = \frac{r_\beta}{R}.$$

Demgemäss sind alsdann die beiden in (5.) stehenden Summen von *gleichem* Werth. Folglich wird:

$$(.7)\quad R^3 F = r_\beta^3 G,$$

oder falls man für R den aus (6.) entspringenden Werth: $R = \sqrt{r_\alpha r_\beta}$ einsetzt:

$$(8.)\quad r_\alpha \sqrt{r_\alpha}\, F = r_\beta \sqrt{r_\beta}\, G.$$

Substituirt man hier für F und G ihre aus (3.), (4.) ersichtlichen Bedeutungen, so gelangt man zu folgendem Satz:

Es seien α und β gegenseitige Spiegelbilder in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche vom Centrum c und Radius R. Ausserdem sei (x, y, z) ein ganz beliebiger variabler Punct.

Bezeichnet man alsdann die Abstände der Puncte α, β und (x, y, z) vom Centrum c respective mit r_α, r_β und r, ferner die reciprocen Abstände des Punctes (x, y, z) von α und β respective mit T_α und T_β, so findet die Formel statt:

$$(9.)\quad r_\alpha \sqrt{r_\alpha}\left(\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial r\, \partial r_\alpha}\right)_{r=R} = r_\beta \sqrt{r_\beta}\left(\frac{\partial^2 T_\beta}{\partial r\, \partial r_\beta}\right)_{r=R},$$

eine Formel, die offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r_\alpha \sqrt{r_\alpha}\,\frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha}\right)\right]_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r_\beta \sqrt{r_\beta}\,\frac{\partial T_\beta}{\partial r_\beta}\right)\right]_{r=R}. \tag{10.}$$

Diese Formel aber repräsentirt die abzuleitende neue Eigenschaft der Spiegelpuncte, welche für die Lösung unserer hydrodynamischen Aufgaben von fundamentaler Wichtigkeit ist, — von derselben Wichtigkeit, welche die früher bekannt gewesenen Eigenschaften dieser Puncte für die elektrostatischen Aufgaben besitzen.

Bemerkung. — *Man kann die Formel* (9.) *auch so schreiben:*

$$\left(T_\alpha^{-3}\,\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial r\,\partial r_\alpha}\right)_{r=R} = \left(T_\beta^{-3}\,\frac{\partial^2 T_\beta}{\partial r\,\partial r_\beta}\right)_{r=R}, \tag{11.}$$

oder auch so:

$$\left(E_\alpha^3\,\frac{\partial E_\alpha^{-1}}{\partial r\,\partial r_\alpha}\right)_{r=R} = \left(E_\beta^3\,\frac{\partial^2 E_\beta^{-1}}{\partial r\,\partial r_\beta}\right)_{r=R}, \tag{12.}$$

wo alsdann E_α und E_β jene Entfernungen selber vorstellen, deren reciproce Werthe mit T_α und T_β bezeichnet worden sind.

Beweis. Nach (C.) p. 150 ist:

$$\sqrt{(c\alpha)} : \sqrt{(c\beta)} = (\sigma\alpha) : (\sigma\beta), \tag{A.}$$

falls man nämlich unter σ irgend welchen Punct *auf* der gegebenen Kugelfläche versteht. Diese Formel (A.) kann man aber auch so schreiben:

$$\sqrt{r_\alpha} : \sqrt{r_\beta} = E_\alpha : E_\beta = T_\alpha^{-1} : T_\beta^{-1}; \tag{B.}$$

wo E_α und E_β die Entfernungen $(\sigma\alpha)$ und $(\sigma\beta)$, andrerseits T_α und T_β die *reciprocen* Werthe dieser Entfernungen vorstellen. Aus (B.) folgt sofort:

$$r_\alpha \sqrt{r_\alpha} : r_\beta \sqrt{r_\beta} = T_\alpha^{-3} : T_\beta^{-3}. \tag{C.}$$

Und mittelst dieser Relation geht die schon bewiesene Formel (10.) über in die zu beweisende Formel (11.). — *Q. e. d.*

Zweite Bemerkung. — *Man kann übrigens für die Formeln* (9.), (10.) *oder was dasselbe ist, für die Formeln* (11.), (12.) *nachträglich noch eine andere Deduction geben, bei welcher die Theorie der Kugelfunctionen nicht erforderlich ist.* Um näher hierauf einzugehen, stellen wir uns zunächst folgende Aufgabe:

Von einem *festen* Puncte 0 gehen zwei *feste* Linien aus, L_1 und L_2. Auf der Linie L_1 befindet sich ein *variabler* Punct 1, dessen Abstand von 0 mit r_1 bezeichnet sein mag. Und analoge Bedeutungen mögen 2 und r_2 für die Linie L_2 besitzen. Endlich sei der gegenseitige Abstand der Puncte 1 und 2 mit E, und der reciproce Werth von E mit T bezeichnet. — Es soll unter diesen Umständen der zweite Differentialquotient von T nach r_1 und r_2 näher untersucht werden.

Führt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunct in 0 liegt, und bezeichnet man in diesem die Coordinaten der Puncte 1 und 2 mit (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), so ist offenbar:

$$(\alpha.)\qquad E^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

mithin:

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial E}{\partial r_1} = \left(\frac{x_1 - x_2}{E}\frac{\partial x_1}{\partial r_1} + \cdots\right) = \cos\psi_1,$$

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial E}{\partial r_2} = \left(\frac{x_2 - x_1}{E}\frac{\partial x_2}{\partial r_2} + \cdots\right) = \cos\psi_2,$$

wo ψ_1 und ψ_2 die *Innen*winkel des Dreiecks 0 1 2 bei den Ecken 1 und 2 vorstellen. Die Formel $(\gamma.)$ kann auch so geschrieben werden:

$$E\frac{\partial E}{\partial r_2} = \left((x_2 - x_1)\frac{\partial x_2}{\partial r_2} + \cdots\right),$$

woraus durch Differentiation nach r_1 folgt:

$$(\delta.)\quad E\frac{\partial^2 E}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{\partial E}{\partial r_1}\frac{\partial E}{\partial r_2} = -\left(\frac{\partial x_1}{\partial r_1}\frac{\partial x_2}{\partial r_2} + \cdots\right) = -\cos\psi_0,$$

wo ψ_0 den *Innen*winkel des Dreiecks 0 1 2 bei der Ecke 0 vorstellt. Subtrahirt man jetzt von der Formel $(\delta.)$ das Product der beiden Formeln $(\beta.)$ und $(\gamma.)$, so folgt:

$$(\varepsilon.)\qquad E\frac{\partial^2 E}{\partial r_1 \partial r_2} = -\cos\psi_0 - \cos\psi_1\cos\psi_2.$$

Nun ist aber $T = E^{-1}$, folglich:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r_1 \partial r_2} = 2E^{-3}\frac{\partial E}{\partial r_1}\frac{\partial E}{\partial r_2} - E^{-2}\frac{\partial^2 E}{\partial r_1 \partial r_2};$$

woraus durch Substitution der Werthe $(\beta.)$, $(\gamma.)$ und $(\varepsilon.)$ sich ergiebt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r_1 \partial r_2} = E^{-3}\left(\cos\psi_0 + 3\cos\psi_1\cos\psi_2\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(\zeta.)\qquad T^{-3}\frac{\partial^2 T}{\partial r_1 \partial r_2} = \cos\psi_0 + 3\cos\psi_1\cos\psi_2.$$

Dies vorangeschickt, sei nun c das Centrum der *gegebenen Kugelfläche*, ferner σ ein variabler Punct *auf* derselben, und endlich seien α und β irgend zwei Puncte, die in Bezug auf diese Kugelfläche gegenseitige Spiegelbilder sind. Dann ist z. B.

$$(\eta.)\qquad (c\alpha)(c\beta) = (c\sigma)^2, \quad \text{und folglich:}$$

$$(\vartheta.)\qquad \Delta(c\alpha\sigma) \sim \Delta(c\sigma\beta).$$

Bezeichnet man jetzt die Abstände $(c\sigma)$, $(c\alpha)$, $(c\beta)$ respective mit r_σ, r_α, r_β, und bringt man sodann auf das Dreieck $c\alpha\sigma$ die Formel $(\zeta.)$ in Anwendung, so folgt:

$$(\varkappa.)\qquad T_{\sigma\alpha}^{-3}\frac{\partial^2 T_{\sigma\alpha}}{\partial r_\sigma \partial r_\alpha} = \cos(\sigma c\alpha) + 3\cos(c\sigma\alpha)\cos(c\alpha\sigma),$$

wo die rechts stehenden Winkel die *Innen*winkel des Dreiecks $c\alpha\sigma$ sein sollen. Ebenso ergiebt sich durch Anwendung derselben Formel auf das Dreieck $c\sigma\beta$ die Gleichung:

$$(\lambda.)\qquad T_{\sigma\beta}^{-3}\,\frac{\partial^2 T_{\sigma\beta}}{\partial r_\sigma \partial r_\beta} = \cos(\sigma c\beta) + 3\cos(c\sigma\beta)\cos(c\beta\sigma),$$

wo die rechts stehenden Winkel wiederum die *Innen*winkel des Dreiecks $c\sigma\beta$ sind. Die genannten beiden Dreiecke sind aber nach (ϑ.) einander *ähnlich,* folglich ihre Winkel einander *gleich.* Hieraus ergiebt sich, dass die *rechten* Seiten der Formeln ($\varkappa$.), (λ.), und folglich auch ihre *linken* Seiten einander gleich sind. Und in solcher Weise gelangt man zu der zu beweisenden Formel (11.). — *Q. e. d.*

§ 6.

Die neue Eigenschaft der Spiegelpuncte in ihrer Anwendung auf eine Kugelfläche des dipolaren Systems.

Wir markiren irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems mit dem Parameter τ, dem Centrum c, und dem Radius R. Ueberdies markiren wir *auf der x-Axe* des dipolaren Systems zwei Puncte α und β, die gegenseitige Spiegelbilder sein sollen in Bezug auf jene Fläche (τ). Bezeichnen wir alsdann die Abstände dieser Puncte α, β und eines *völlig beliebigen Punctes* (x, y, z) vom Centrum c respective mit r_α, r_β und r, so ist nach (10.) p. 158:

$$(1.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r_\alpha \sqrt{r_\alpha}\,\frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha}\right)\right]_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r_\beta \sqrt{r_\beta}\,\frac{\partial T_\beta}{\partial r_\beta}\right)\right]_{r=R},$$

wo T_α und T_β die reciprocen Entfernungen des Punctes (x, y, z) von α und β vorstellen. Sind nun $(\vartheta_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_\alpha, \xi_\alpha)$ und $(\vartheta_\beta, \omega_\beta, \varphi_\beta, \xi_\beta)$ die dipolaren Coordinaten der Puncte α und β, so ist nach (A.), (B.), (C.) p. 150:

$$(2.)\qquad \omega_\alpha = \omega_\beta, \qquad \vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = 2\tau, \qquad \frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \frac{\sqrt{(c\alpha)}}{\sqrt{(c\beta)}}, \quad \text{d. i.} = \frac{\sqrt{r_\alpha}}{\sqrt{r_\beta}},$$

mithin $\sqrt{r_\alpha} : \sqrt{r_\beta} = \xi_\alpha : \xi_\beta$. Demgemäss kann die Formel (1.) auch so geschrieben werden:

$$(3.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\alpha^3\,\frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha}\right)\right]_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\beta^3\,\frac{\partial T_\beta}{\partial r_\beta}\right)\right]_{r=R}.$$

Das r, d. i. der Abstand des variablen Punctes (x, y, z) vom Kugelcentrum c, mag vorläufig beibehalten werden. Hingegen wollen wir r_α und r_β, die Centralabstände der Puncte α und β, durch die dipolaren Coordinaten dieser Puncte zu ersetzen suchen.

Die Puncte α und β liegen nach unserer Voraussetzung *auf der x-Axe* des dipolaren Systems. Demgemäss wird z. B. die durch α gehende Kugelfläche $\vartheta = \vartheta_\alpha$ im Puncte α *normal* stehen gegen die x-Axe, mithin daselbst auch *normal* stehen gegen die Linie r_α. Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich sofort:

$$(4.)\qquad \frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\frac{d\vartheta_\alpha}{dr_\alpha};\quad \text{und ebenso:}\quad \frac{\partial T_\beta}{\partial r_\beta} = \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\frac{d\vartheta_\beta}{dr_\beta}.$$

Ferner ist nach (33.) p. 109:

$$(5.)\qquad \frac{d\vartheta_\alpha}{dr_\alpha} = \varepsilon_\alpha \frac{2a}{\xi_\alpha^2},\quad \text{und:}\quad \frac{d\vartheta_\beta}{dr_\beta} = \varepsilon_\beta \frac{2a}{\xi_\beta^2},$$

wo jede der beiden Grössen ε_α, ε_β den Werth ± 1 hat.

Um zu entscheiden, ob diese Grössen ε_α und ε_β einander gleich oder entgegengesetzt sind, bemerken wir zuvörderst, dass die in (5.) vorhandenen Nenner dr_α und dr_β ganz *willkührlich* und *von einander unabhängig* gewählt werden können. Ob wir z. B. beide Nenner positiv oder beide negativ, oder aber den einen positiv, den andern negativ wählen, ist völlig gleichgültig. Sobald aber diese Nenner dr_α und dr_β einmal gewählt *sind*, haben alsdann die Zähler $d\vartheta_\alpha$ und $d\vartheta_\beta$ ganz bestimmte Bedeutungen, indem $d\vartheta_\alpha$ den mit dr_α correspondirenden Zuwachs von ϑ_α, und ebenso $d\vartheta_\beta$ den mit dr_β correspondirenden Zuwachs von ϑ_β vorstellt.

Uebrigens können die Nenner dr_α und dr_β offenbar bezeichnet werden als *kleine Verschiebungen der Puncte α und β längs der x-Axe;* und diese in (5.) auftretenden Verschiebungen können also ganz *nach Willkühr* gewählt werden. Hievon Gebrauch machend, lassen wir jene beiden Puncte α und β sich in solcher Weise verschieben, *dass sie dabei fortdauernd gegenseitige Spiegelbilder bleiben in Bezug auf die gegebene Kugelfläche* (τ). Alsdann werden die ursprünglich stattfindenden Relationen:

$$(a.)\qquad r_\alpha r_\beta = R^2 \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = 2\tau,\quad [\text{vgl. } (2.)],$$

auch *während* dieser Verschiebung in Kraft bleiben; sodass sich also ergiebt:

$$(b.)\qquad r_\alpha dr_\beta + r_\beta dr_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad d\vartheta_\alpha + d\vartheta_\beta = 0;$$

woraus durch Division folgt:

$$(c.)\qquad r_\alpha\left(\frac{d\vartheta_\alpha}{dr_\alpha}\right) = r_\beta\left(\frac{d\vartheta_\beta}{dr_\beta}\right).$$

Und hieraus erkennt man, *dass die in Klammern gesetzten Differentialquotienten einerlei Vorzeichen haben;* denn r_α und r_β sind ja ihrer Bedeutung nach stets positiv. Solches constatirt, ergiebt sich alsdann aus (5.) aber sofort, *dass ε_α und ε_β ebenfalls von einerlei Vorzeichen sind,* dass mithin

$$(d.)\qquad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta \text{ ist.}$$

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth der Grössen ε_α und ε_β kurzweg mit ε, so folgt aus (4.), (5.):

$$(6.)\qquad \frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha} = \frac{2a\varepsilon}{\xi_\alpha^2}\frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}, \quad \text{und:} \quad \frac{\partial T_\beta}{\partial r_\beta} = \frac{2a\varepsilon}{\xi_\beta^2}\frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}.$$

Und substituirt man endlich diese Werthe in (3.), so erhält man die verhältnissmässig einfache Formel:

$$(7.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right)\right]_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right)\right]_{r=R}.$$

Somit gelangt man zu folgendem Satz.

Es sei gegeben irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems mit dem Parameter τ, dem Centrum c und dem Radius R. Ferner seien auf der x-Axe des dipolaren Systems irgend zwei Puncte α und β markirt, die gegenseitige Spiegelbilder sind in Bezug auf jene Kugelfläche (τ). Endlich sei (x, y, z) ein ganz beliebiger Punct, und r sein Abstand vom Centrum c. Alsdann findet die Formel statt:

$$(8.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right)\right]_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right)\right]_{r=R},$$

wo T_α und T_β die reciprocen Entfernungen des Punctes (x, y, z) von α und β vorstellen.

Bemerkung. — In der Formel (8.) sind die in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke zuvörderst für einen ganz *beliebigen* Raumpunct (x, y, z) zu bilden, sodann hat man diesen Raumpunct (x, y, z), wie solches durch den beigefügten Suffix: $r = R$ angedeutet ist, hinwandern zu lassen nach irgend einer Stelle der gegebenen Kugelfläche. Bezeichnet man übrigens die dipolaren Coordinaten des Punctes (x, y, z) mit ($\vartheta, \omega, \varphi$), und beachtet man überdiess die bekannte Relation:

$$\xi_\alpha : \xi_\beta = \frac{1}{\sqrt{\psi_\alpha}} : \frac{1}{\sqrt{\psi_\beta}}, \qquad \text{[vgl. (25.) p. 105],}$$

so kann man jene Formel (8.) offenbar auch *so* schreiben:

$$(f.)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_\alpha}}\frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right)\right]_{\vartheta=\tau} = \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_\beta}}\frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right)\right]_{\vartheta=\tau}.$$

Und in dieser Gestalt kann man die Formel *direct* beweisen, unter Zugrundelegung der für T geltenden Entwicklung (37. a, b) p. 110. Bei der hiebei erforderlichen, ziemlich mühsamen und beschwerlichen Rechnung verschaffen die Sätze (ζ.), (η.) p. 120 eine gewisse Erleichterung.

Bequemer, wenn auch weniger genau, wird man übrigens den in Rede stehenden Satz (8.) auch so aussprechen können: *Ist irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems gegeben, und sind ausserdem auf der x-Axe dieses Systems irgend zwei Puncte α und β markirt, die in Bezug*

auf jene Fläche gegenseitige Spiegelbilder sind, so findet die Formel statt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right), \tag{9.}$$

oder, was dasselbe ist, die Formel:

$$\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}} \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} = \xi_\beta \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}} \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}. \tag{9.a}$$

Dabei bezeichnet N *die auf der gegebenen Kugelfläche an irgend einer Stelle errichtete Normale; während* T_α *und* T_β *die reciprocen Entfernungen dieser Stelle von* α *und von* β *repräsentiren.*

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch eine gewisse Aufgabe absolviren, die für unsere spätern Untersuchungen von besonderer. Wichtigkeit ist. Nach (9.) sind nämlich die beiden Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right) \tag{10.}$$

einander gleich. Wir stellen uns die Aufgabe, den gemeinschaftlichen Werth dieser beiden Ausdrücke für *den* Fall zu ermitteln, dass der Punct α längs der x-Axe ins Unendliche, mithin β in das Centrum der gegebenen Kugelfläche rückt.

Bezeichnet man den Fusspunct der Normale N mit σ, den nach σ laufenden Kugelradius mit R, und den Winkel dieses Radius R gegen die positive x-Axe mit w, und denkt man sich ausserdem den Punct α auf dieser positiven x-Axe gelegen, und bereits in ungemein grosser Entfernung vom Kugelcentrum, so ist bekanntlich:

$$T_\alpha = \frac{1}{r_\alpha} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R^n}{r_\alpha^{n+1}} P_n(\cos w). \tag{11.}$$

Hieraus wird der Differentialquotient von T_α nach ϑ_α zu berechnen sein mittelst der Formel:

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} = \frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha} \frac{d r_\alpha}{d \vartheta_\alpha}, \quad \text{wo} \quad \frac{d r_\alpha}{d \vartheta_\alpha} = \frac{\varepsilon}{2a} \xi_\alpha^2 \text{ ist, [vgl. (5.) p. 161].} \tag{12.}$$

Um das hier auftretende $\varepsilon = \pm 1$ zu bestimmen, machen wir von Neuem darauf aufmerksam, dass der Punct α *längs der positiven x-Axe bereits in eine ausserordentlich grosse Entfernung gerückt sein soll* Alsdann übersieht man sofort, dass ϑ_α bei *wachsendem* r_α *abnehmen* wird*), dass also jenes ε in der zweiten Formel (12.) den Werth — 1

*) Vgl. den Satz p. 103.

hat. Solches constatirt, ergiebt sich nun aus den *beiden* Formeln (12.):

$$\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} = -\frac{1}{2a}\xi_\alpha^3 \frac{\partial T_\alpha}{\partial r_\alpha},$$

also mit Rücksicht auf (11.)

$$\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} = +\frac{1}{2a}\xi_\alpha^3\left(\frac{1}{r_\alpha^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n+1)R^n}{r_\alpha^{n+2}} P_n(\cos w)\right).$$

In Folge der ausserordentlich grossen Entfernung des Punctes α ist aber das geometrische Mittel ξ_α seiner beiden Polabstände nur unmerklich verschieden von r_α. Man kann somit $\xi_\alpha = r_\alpha$ setzen, und erhält alsdann:

$$\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} = +\frac{1}{2a}\left(r_\alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n+1)R^n}{r_\alpha^{n-1}} P_n(\cos w)\right).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach R:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)R^{n-1}}{r_\alpha^{n-1}} P_n(\cos w),$$

oder falls man jetzt schliesslich den Punct α wirklich *ins Unendliche* rücken lässt:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{1}{2a} P_1(\cos w), \text{ d. i. } = \frac{\cos w}{a},$$

oder weil $w = (R, x)$ ist:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{\cos(R, x)}{a}. \tag{13.}$$

Diese Formel (13.) bleibt offenbar in Richtigkeit, wenn man in ihr auf *beiden* Seiten die Richtung des Radius R mit der entgegengesetzten Richtung vertauscht. Mag man also unter der Normale N die eine oder die andere Richtung verstehen, stets wird

$$\frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{\cos(\mathsf{N}, x)}{a} \tag{14.}$$

sein, falls man nur den Punct α auf der *positiven* x-Axe in unendlicher Ferne sich vorstellt.

Zu genau denselben Formeln (13.), (14.) gelangt man übrigens auch dann, wenn man α längs der *negativen* x-Axe ins Unendliche rücken lässt. Allerdings wird in diesem Fall in (11.) $\pi - w$ statt w zu setzen sein. Diese Aenderung wird aber dadurch compensirt, dass

alsdann das ε in (12.) nicht mehr $= -1$, sondern $= +1$ ist. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Der gemeinschaftliche Werth der beiden in (9.) *angegebenen Ausdrücke:*

$$(15.)\qquad \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial \mathsf{N}}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right)$$

wird, falls man α *längs der positiven oder negativen* x*-Axe ins Unendliche rücken, mithin* β *in das Centrum der gegebenen Kugelfläche hineinfallen lässt, übergehen in:*

$$(16.)\qquad \frac{\cos(\mathsf{N}, x)}{a}$$

wo $2a$ *den gegenseitigen Abstand der beiden Pole* A, A' *vorstellt, während* (N, x) *den Neigungswinkel der Normale* N *gegen die positive* x*-Axe bezeichnet. Uebrigens kann man den in Rede stehenden Grenzwerth* (16.) *auch so schreiben:*

$$(17.)\qquad \frac{1}{a}\frac{\partial x}{\partial \mathsf{N}},$$

falls man nämlich die rechtwinkligen Coordinaten des Fusspunctes der Normale N *mit* (x, y, z) *bezeichnet.*

§ 7.

Ueber eine auf die Probleme der Hydrodynamik anwendbare combinatorische Methode.

Man kann von den *Potentialfunctionen eines gegebenen Raumes* $\mathfrak{R}$ sprechen, indem man nach dem Vorgange von Lipschitz und auch wohl anderer Mathematiker, unter einer solchen Function das Potential irgend welcher Massen versteht, die theils *ausserhalb* theils *auf der Grenze* des Raumes $\mathfrak{R}$ liegen.

Diese Potentialfunctionen sind von grosser Wichtigkeit für die Probleme der *Wärmevertheilung*, ferner für die Probleme der *Elektrostatik*, der *Elektrodynamik* und des *Magnetismus*, und endlich auch für gewisse Probleme der *Hydrodynamik*. In der That drehen sich fast alle Probleme der genannten Disciplinen um die Auffindung *derjenigen* Potentialfunction eines gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$, welche an der Grenze von $\mathfrak{R}$ *gegebenen Bedingungen* entspricht.

Ist (x, y, z) ein variabler Punct *innerhalb* des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$, und ist ferner $\Phi = \Phi(x, y, z)$ irgend eine *Potentialfunction* des Raumes $\mathfrak{R}$, so wird diese Function offenbar folgende Eigenschaften besitzen:

$$(\text{A.})\qquad \Phi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ \textit{stetig}, \text{ und } \Delta\Phi = 0, \text{ innerhalb } \mathfrak{R}.$$

Ist insbesondere der Raum $\mathfrak{R}$ ein sich nach allen Seiten ins Unendliche

erstreckender, z. B. der Aussenraum einer gegebenen Kugelfläche, so wird jedwede *Potentialfunction* $\Phi = \Phi(x, y, z)$ dieses Raumes $\mathfrak{R}$, ausser den Eigenschaften (*A.*), auch noch *die* besitzen, dass Φ für alle sich ins Unendliche entfernenden Puncte (x, y, z) gegen einen Werth von der Form

$$\text{(B.)} \qquad \frac{M}{r}$$

convergirt, wo M eine *Constante* bezeichnet, während r die Entfernung des Punctes (x, y, z) von irgend einem *festen* Puncte vorstellt. Und demgemäss werden in diesem Fall

$$\text{(C.)} \qquad \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \text{etc. etc. etc.}$$

für alle sich ins Unendliche entfernenden Puncte (x, y, z) gegen *Null* convergiren.

Dies vorangeschickt, wollen wir nun die zu exponirende *combinatorische Methode* zunächst in möglichst allgemeinen Umrissen zur Anschauung bringen, sodann dieselbe aber durch geeignete Specialisirung der zu lösenden hydrodynamischen Aufgabe anpassen. — Es seien irgend zwei *geschlossene Flächen* σ *und* σ_0 gegeben, entweder ineinandergeschachtelt, oder nebeneinander liegend; und der von diesen beiden Flächen begrenzte Raum sei mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

Sind z. B. σ und σ_0 zwei Ellipsoidflächen, so wird der von ihnen begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ ein *schaalenförmiger* sein, falls σ und σ_0 *ineinandergeschachtelt* sind. Liegen hingegen die beiden Ellipsoidflächen σ und σ_0 nicht ineinander, sondern *nebeneinander*, so wird der von ihnen begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ offenbar nichts Anderes sein als der *unendliche Aussenraum* der beiden Ellipsoidflächen, d. i. derjenige Raum, welcher die beiden Ellipsoide wie zwei Inseln umgiebt, und nach allen Seiten ins Unendliche reicht. Die Flächen σ und σ_0 können aber z. B. auch zwei *ringförmige Flächen* sein. U. s. w.

Repräsentirt nun K eine gegebene Constante, ferner $F = F(x, y, z)$ *eine ganz adlibitum gegebene Function* (also *keine* Potentialfunction des Raumes $\mathfrak{R}$), *und soll eine Potentialfunction* $\Phi = \Phi(x, y, z)$ *des Raumes* $\mathfrak{R}$ *ermittelt werden, welche an den beiden Begrenzungsflächen* σ *und* σ_0 *dieses Raumes den Bedingungen entspricht:*

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = K \frac{\partial F}{\partial \mathsf{N}}, \quad \textit{auf } \sigma,$$

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = 0, \qquad \textit{auf } \sigma_0,$$

wo N *die Normale von* σ, *respective* σ_0 *bezeichnet, — so gilt, was die Lösung dieser Aufgabe betrifft, folgender Satz:*

Gelingt es, irgend welche Potentialfunctionen $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6,$

Φ_7, *etc. etc. des Raumes* $\mathfrak{R}$ *zu finden, die der Reihe nach den Bedingungen entsprechen:*

$$(\gamma.)\qquad \begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma_0, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_5}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma_0, \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_6}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma, & \frac{\partial \Phi_6}{\partial N} = \frac{\partial \Phi_7}{\partial N},\ \textit{auf}\ \sigma_0, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

so wird jene eigentlich gesuchte Potentialfunction Φ *dargestellt sein durch die unendliche Reihe:*

$$(\delta.)\qquad \Phi = K(\Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_5 + \Phi_6 - \Phi_7 + - \cdots\cdots),$$

vorausgesetzt, dass diese Reihe convergent ist.

Beweis. — Aus (δ.) folgt sofort:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = K\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial N} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial N} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial N} - \frac{\partial \Phi_5}{\partial N} + \frac{\partial \Phi_6}{\partial N} - \frac{\partial \Phi_7}{\partial N} + - \cdots\right).$$

Hieraus aber ergiebt sich speciell für die Fläche σ, mittelst der Formeln (γ.) *linker* Hand:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = K\frac{\partial F}{\partial N},\ \text{auf}\ \sigma,$$

und andererseits speciell für die Fläche σ_0, mittelst der Formeln (γ.) *rechter* Hand:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0,\ \text{auf}\ \sigma_0. \quad \text{— } \textit{Q. e. d.}$$

§ 8.

Speciellere Form der angegebenen Methode für den Fall von zwei Kugelflächen.

Die soeben exponirte Methode wollen wir jetzt auf folgende Aufgabe in Anwendung bringen: An Stelle der beliebigen Flächen σ und σ_0 sind *irgend zwei Kugelflächen* (τ) *und* (τ_0) *des dipolaren Systems* gegeben. Es soll diejenige Potentialfunction $\Phi = \Phi(x, y, z)$ des von (τ) und (τ_0) begrenzten Raumes $\mathfrak{R}$ berechnet werden, welche den Grenzbedingungen entspricht:

$$(1.\text{a})\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = K\frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right),\ \text{auf der Fläche}\ (\tau),$$

$$(1.\text{b})\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0,\ \text{auf der Fläche}\ (\tau_0).$$

Dabei soll α ein gegebener *fester* Punct *auf der x-Axe des dipolaren*

Systems sein, mit den Coordinaten $(\vartheta_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_\alpha, \xi_\alpha)$. Ferner soll T_α den reciprocen Abstand des variablen Punctes (x, y, z) von diesem festen Puncte α bezeichnen; so dass also die im vorhergehenden § in $(\alpha.)$ auftretende Function $F = F(x,y,z)$ im gegenwärtigen Fall die *specielle Gestalt:* $\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}$ besitzt. Endlich soll, ebenso wie damals, das K eine gegebene Constante sein.

Bemerkung. — Je nachdem die Parameter τ und τ_0 der beiden gegebenen Kugelflächen von *gleichem* oder *verschiedenem* Vorzeichen sind, werden offenbar diese Flächen *ineinander* oder *nebeneinander* gelagert sein. Und der von diesen beiden Flächen begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ wird daher im erstern Fall eine *schaalenförmige Gestalt* haben, im letztern Fall hingegen den *unendlichen Aussenraum* der beiden Kugelflächen repräsentiren. Wir werden vorläufig diese beiden Fälle nicht weiter trennen, sondern *beide gleichzeitig* behandeln. Uebrigens gilt ganz allgemein, im einen wie im andern Fall, wie man leicht übersieht, folgende Regel:

Sind die Coordinaten $\vartheta, \omega, \varphi$ irgend eines Punctes gegeben, so wird derselbe *innerhalb* oder *ausserhalb* des Raumes $\mathfrak{R}$ liegen, jenachdem das ϑ, seiner Grösse nach, *zwischen* $\tau \ldots . \tau_0$, oder *ausserhalb* $\tau \ldots . \tau_0$ gelegen ist.

Was die Lösung der gestellten Aufgabe betrifft, so beginnen wir damit, dass *wir den auf der x-Axe liegenden festen Punct* α an der Kugelfläche (τ) sich spiegeln lassen, und dieses Spiegelbild mit β bezeichnen:

$$(2.)\qquad \alpha - (\tau) - \beta$$

Selbstverständlich liegt alsdann β ebenfalls *auf der x-Axe.* Irgend einen dieser beiden Puncte α, β bezeichnen wir mit 1, die nähere Bestimmung hierüber uns noch vorbehaltend. Die Hinzufügung des festen Punctes β, und die Einführung eines Punctes 1, der vorläufig einen *beliebigen* der beiden Puncte α, β vorstellt, wird weiterhin sich als sehr nützlich erweisen.

Nach der neuen Eigenschaft der Spiegelpuncte [(9.) p. 163] ist offenbar:

$$(3.)\qquad \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial \vartheta_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta_1}\right), \text{ auf der Fläche } (\tau),$$

wo stets unter T_j die reciproce Entfernung des variablen Punctes (x, y, z) vom Puncte j zu verstehen ist. Und mit Rücksicht hierauf nehmen die zu erfüllenden Grenzbedingungen (1. a, b) die Gestalt an:

$$(4.a)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = K \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta_1}\right), \text{ auf der Fläche } (\tau),$$

$$(4.b)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0, \text{ auf der Fläche } (\tau_0).$$

Lassen wir den Punct 1 alternirend an den Flächen (τ) und (τ_0) sich spiegeln, und bezeichnen wir die so entstehenden Spiegelbilder mit 2, 3, 4, 5, ..., entsprechend dem Schema:

(5.) $\quad 1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - (4) - (\tau_0) - 5 - \text{etc.}$

so ergeben sich nach der neuen Eigenschaft der Spiegelpuncte [(9.) p. 163] die Formeln:

$$(6.)\quad \begin{array}{l|l} \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta_1}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2}\right), \text{ auf } (\tau), & \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3}\right), \text{ auf } (\tau_0), \\ \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4}\right), \text{ auf } (\tau), & \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4}\right) = \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5}\right), \text{ auf } (\tau_0), \\ \qquad \text{etc. etc.} & \qquad \text{etc. etc.} \end{array}$$

wo die T_j die reciprocen Entfernungen des variablen Punctes (x, y, z) von den festen Puncten j bezeichnen. *Dies vorausgeschickt, lässt sich nun zeigen, dass die gesuchte Function* Φ *den Werth besitzt;*

$$(7.)\qquad \Phi = K\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \xi_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} + - \cdots\right),$$

vorausgesetzt, dass man dabei über die Lage des Punctes 1, d. i. über die noch offen gebliebene Frage, ob derselbe mit α oder mit β zu identificiren sei, in zweckmässiger Weise entscheidet. In der That werden wir nachweisen, dass dieser für Φ aufgestellte Ausdruck (7.), bei geeigneter Verfügung über jenen Punct 1, erstens den *Grenzbedingungen* (1. a, b) oder (4. a, b) entspricht, zweitens eine *Potentialfunction* des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$ ist, und drittens endlich auch *convergent* ist.

Beweis der Erfüllung der Grenzbedingungen. — Differenzirt man die Formel (7.) nach der Normale N, so erhält man mit Rücksicht auf die Relationen (6.) *linker* Hand:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = K \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta_1}\right), \text{ auf der Fläche } (\tau),$$

und andrerseits mit Rücksicht auf die Relationen (6.) *rechter* Hand:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0, \text{ auf der Fläche } (\tau_0).$$

Demgemäss genügt also der von uns für Φ angegebene Werth (7.) den zu erfüllenden Grenzbedingungen (4. a, b). — *Q. c. d.*

Beweis des Vorhandenseins der Potential-Eigenschaften. — Wir können über den Punct 1 noch disponiren, denselben nämlich nach Belieben, entweder mit α oder mit β coincidiren lassen. Haben wir aber in dieser Hinsicht eine bestimmte Wahl getroffen, so ergeben sich alsdann, von 1 aus, auch bestimmte Lagen der übrigen Puncte 2, 3, 4,

5, 6, ..., [vgl. (5.)]. Soll nun die Function Φ (7.) eine *Potentialfunction des Raumes* $\mathfrak{R}$ sein, so muss dafür gesorgt werden, dass alle in jenem Ausdruck (7.) enthaltenen festen Puncte, nämlich 2, 3, 4, 5, 6, ..., (nicht 1), *ausserhalb* des Raumes $\mathfrak{R}$ liegen.

Man könnte versucht sein, dies dadurch zu erreichen, dass man festsetzt, für den Punct 1 solle derjenige der beiden Puncte α, β genommen werden, welcher *innerhalb* $\mathfrak{R}$ liegt. Eine derartige Festsetzung muss aber schon deswegen verworfen werden, weil derselben nicht unter allen Umständen entsprochen werden kann. In der That kann nämlich der Fall eintreten, dass von jenen beiden Puncten α und β *keiner* innerhalb $\mathfrak{R}$ sich befindet, vielmehr *beide ausserhalb* $\mathfrak{R}$ liegen. Dies wird z. B. eintreten, wenn $\mathfrak{R}$ ein schaalenförmiger Raum ist, begrenzt von zwei concentrischen Kugelflächen (τ) und (τ_0), und wenn gleichzeitig der gegebene Punct α im Centrum dieser beiden Flächen sich befindet. Denn alsdann liegt β, zufolge (2.), in unendlicher Ferne; so dass also α und β *beide ausserhalb* $\mathfrak{R}$ sich befinden.

Um dafür zu sorgen, dass 2, 3, 4, 5, 6, ... sämmtlich *ausserhalb* des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$ liegen, bemerken wir zuvörderst, dass die Puncte α, β, zufolge (2.), der Relation entsprechen: $\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = 2\tau$, dass also die beiden Differenzen

$$(\vartheta_\alpha - \tau) \quad \text{und} \quad (\vartheta_\beta - \tau)$$

entgegengesetzte Werthe, mithin auch *entgegengesetzte Vorzeichen* haben. Unter diesen beiden Differenzen wird daher stets *eine* vorhanden sein, welche mit der gegebenen Differenz $(\tau_0 - \tau)$ von *gleichem* Vorzeichen ist. Je nachdem nun $(\vartheta_\alpha - \tau)$, oder aber $(\vartheta_\beta - \tau)$ mit $(\tau_0 - \tau)$ im Vorzeichen übereinstimmt, wollen wir im ersten Fall den Punct α, im letztern den Punct β zum Puncte 1 auserwählen. *Wir setzen also fest, dass zum Puncte* 1 *einer der beiden Puncte* α, β, *mithin zur Grösse* ϑ_1 *eine der beiden Grössen* ϑ_α, ϑ_β *genommen werden soll, und zwar in solcher Weise, dass die Differenzen*

(8.) $\quad (\vartheta_1 - \tau)$ *und* $(\tau_0 - \tau)$ *beide von einerlei Vorzeichen sind.*

In der That lässt sich nachweisen, dass alsdann sämmtliche Puncte 2, 3, 4, 5, 6, ... *ausserhalb* $\mathfrak{R}$ liegen. Um diesen Nachweis zu führen, erinnern wir zunächst daran, dass α und β *auf der x-Axe liegen*, dass mithin Gleiches auch von 1, und also, nach (5.), auch von 2, 3, 4, 5, 6, ... gilt. Sodann notiren wir zu diesem Zweck die aus (5.) entspringenden Relationen:

(9.) $\quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \ldots; \qquad$ [vgl. (B.) p. 154];

aus denen beiläufig folgt, dass diese ω-Coordinaten entweder *alle* $= 0$ oder *alle* $= \pi$ sind [vgl. den Anfang der Bemerkungen p. 102]. Ueber-

diess notiren wir, für den genannten Zweck, die ebenfalls aus (5.) sich ergebenden Relationen:

$$\begin{array}{ll} \vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\tau, & \vartheta_2 + \vartheta_3 = 2\tau_0, \\ \vartheta_3 + \vartheta_4 = 2\tau, & \vartheta_4 + \vartheta_5 = 2\tau_0, \\ \vartheta_5 + \vartheta_6 = 2\tau, & \vartheta_6 + \vartheta_7 = 2\tau_0, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array} \qquad \text{[vgl. (C.) p. 154],}$$

aus denen successive folgt:

$$(10.) \qquad \begin{array}{ll} \vartheta_2 = 2\tau - \vartheta_1, & \vartheta_3 = 2\tau_0 - 2\tau + \vartheta_1, \\ \vartheta_4 = 4\tau - 2\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_5 = 4\tau_0 - 4\tau + \vartheta_1, \\ \vartheta_6 = 6\tau - 4\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_7 = 6\tau_0 - 6\tau + \vartheta_1, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

Dies vorangeschickt, unterscheiden wir jetzt aber *zwei Fälle*, je nachdem die Differenzen (8.) *negativ* oder *positiv* sind.

Erster Fall: Die Differenzen (8.) *sind beide negativ.* Führt man also zwei neue Grössen Δ, δ ein, indem man setzt:

$$(A.) \qquad \vartheta_1 = \tau - \Delta \quad \text{und} \quad \tau_0 = \tau - \delta,$$

so sind Δ, δ beide *positiv*. Substituirt man jetzt für ϑ_1 und τ_0 diese Werthe (A.) in die Relationen (8.), so gelangt man zu folgenden Formeln:

$$(A'.) \qquad \begin{array}{ll} \tau = \tau, & \tau_0 = (\tau - \delta), \\ \vartheta_2 = \tau + \Delta, & \vartheta_3 = (\tau - \delta) - (\Delta + \delta), \\ \vartheta_4 = \tau + \Delta + 2\delta, & \vartheta_5 = (\tau - \delta) - (\Delta + 3\delta), \\ \vartheta_6 = \tau + \Delta + 4\delta, & \vartheta_7 = (\tau - \delta) - (\Delta + 5\delta), \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

woraus (weil Δ, δ positiv sind) sofort folgt:

$$(A''.) \qquad \cdots\cdot < \vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 < \tau_0 < \tau < \vartheta_2 < \vartheta_4 < \vartheta_6 < \cdots\cdot$$

Und hieraus ersieht man, dass die Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... sämmtlich *ausserhalb* $\mathfrak{R}$ liegen [vgl. die Bemerkung p. 168].

Zweiter Fall. Die Differenzen (8.) *sind beide positiv.* Setzt man also:

$$(B.) \qquad \vartheta_1 = \tau + \mathsf{E} \quad \text{und} \quad \tau_0 = \tau + \varepsilon,$$

so sind E, ε beide *positiv*. In diesem Fall wird man statt der Formeln (A'.) offenbar folgende erhalten:

$$(B'.) \qquad \begin{array}{ll} \tau = \tau, & \tau_0 = (\tau + \varepsilon), \\ \vartheta_2 = \tau - \mathsf{E}, & \vartheta_3 = (\tau + \varepsilon) + (\mathsf{E} + \varepsilon), \\ \vartheta_4 = \tau - \mathsf{E} - 2\varepsilon, & \vartheta_5 = (\tau + \varepsilon) + (\mathsf{E} + 3\varepsilon), \\ \vartheta_6 = \tau - \mathsf{E} - 4\varepsilon, & \vartheta_7 = (\tau + \varepsilon) + (\mathsf{E} + 5\varepsilon), \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

aus diesen aber folgt (weil E, ε positiv sind) sofort:

(B''.) $\quad \cdots > \vartheta_7 > \vartheta_5 > \vartheta_3 > \tau_0 > \tau > \vartheta_2 > \vartheta_4 > \vartheta_6 > \cdots$

Und hieraus ersieht man, dass die Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... sämmtlich *ausserhalb* $\mathfrak{R}$ liegen [vgl. die Bemerkung p. 168].

Im einen wie im andern Fall befinden sich also die in dem analytischen Ausdruck der Function Φ (7.) enthaltenen festen Puncte 2, 3, 4, 5, ... *ausserhalb* des Raumes $\mathfrak{R}$. Folglich ist diese Function Φ eine *Potentialfunction* des Raumes $\mathfrak{R}$. — *Q. e. d.*

Beweis der Convergenz. — Man kann die Formel (7.) offenbar auch so schreiben:

(11.) $$\Phi = K \sum_{j=2}^{j=\infty} (-1)^j \xi_j \frac{\partial E_j^{-1}}{\partial \vartheta_j},$$

wo j den allgemeinen Punct der Reihe 2, 3, 4, 5, ... repräsentirt, und E_j den Abstand dieses Punctes j von dem variablen Punct (x, y, z) vorstellt. Sind nun (x_j, y_j, z_j) die Coordinaten des Punctes j (mithin $y_j = z_j = 0$), so erhält man:

$$\frac{\partial E_j^{-1}}{\partial \vartheta_j} = \frac{\partial E_j^{-1}}{\partial x_j} \frac{d x_j}{d \vartheta_j}, \quad \text{wo} \quad \frac{d x_j}{d \vartheta_j} = \frac{\varepsilon_j}{2a} \xi_j^2 \text{ ist}, \quad \text{[vgl. (33.) p. 109].}$$

Dabei ist das $\varepsilon_j = \pm 1$. Somit folgt:

$$\frac{\partial E_j^{-1}}{\partial \vartheta_j} = \left(- E_j^{-2} \frac{x_j - x}{E_j}\right)\left(\frac{\varepsilon_j}{2a} \xi_j^2\right) = \frac{1}{2a} \frac{x - x_j}{E_j^3} \varepsilon_j \xi_j^2.$$

Dies in (11.) substituirt, giebt:

(12.) $$\Phi = \frac{K}{2a} \sum_{j=2}^{j=\infty} f_j \xi_j^3, \quad \text{wo } f_j = (-1)^j \varepsilon_j \frac{x - x_j}{E_j^3}.$$

Da nun die f_j durchweg *endlich* sind, so ist zur Convergenz dieser Reihe nur erforderlich, dass der Ausdruck

(13.) $$\sum_{j=2}^{j=\infty} \xi_j^3$$

convergirt. Dass diess aber der Fall ist, lässt sich leicht zeigen.

Nach (10.) ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 &= 2(\tau - \tau_0) + (2\tau_0 - \vartheta_1), & \vartheta_3 &= -2(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\
\vartheta_4 &= 4(\tau - \tau_0) + (2\tau_0 - \vartheta_1), & \vartheta_5 &= -4(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\
\vartheta_6 &= 6(\tau - \tau_0) + (2\tau_0 - \vartheta_1), & \vartheta_7 &= -6(\tau - \tau_0) + \vartheta_1, \\
&\text{etc. etc.} & &\text{etc. etc.}
\end{aligned}$$

mithin allgemein:

$$\vartheta_{2p} = 2p(\tau - \tau_0) + (2\tau_0 - \vartheta_1), \qquad \vartheta_{2p+1} = -2p(\tau - \tau_0) + \vartheta_1.$$

Hieraus aber folgt für ein *exorbitant grosses* p:

$$(14.) \qquad \vartheta_{2p} = 2p(\tau - \tau_0), \qquad \vartheta_{2p+1} = -2p(\tau - \tau_0).$$

Nun ist allgemein für jeden beliebigen Punct $(\vartheta, \omega, \varphi)$:

$$\xi = \frac{2a}{\sqrt{\psi}} = \frac{2a}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega}}, \qquad \text{[vgl. (15.), (25.) p. 105].}$$

Bildet man diese Formel für die Puncte $2p$, $2p+1$, indem man für die ϑ-Coordinaten derselben die Werthe (14.) substituirt, und gleichzeitig beachtet, dass die ω-Coordinaten derselben entweder $= 0$ oder $= \pi$ sind [vgl. (9.)], so erhält man sofort:

$$\xi_{2p} = \xi_{2p+1} = \frac{2a}{\sqrt{2 \cos 2pi(\tau - \tau_0) \mp 2}}.$$

Nun sind aber die ξ die geometrischen Mittel der betreffenden Polabstände, mithin stets *positiv*. Somit folgt:

$$\xi_{2p} = \xi_{2p+1} = \frac{2a}{e^{pA} \mp e^{-pA}},$$

d. i.

$$(15.) \qquad \xi_{2p} = \xi_{2p+1} = \frac{2ae^{-pA}}{1 \mp e^{-2pA}},$$

wo A den *absoluten* Werth der Differenz $(\tau - \tau_0)$ vorstellt. Und hieraus, nämlich aus (15.), folgt sofort, dass die Reihe (13.) *convergent* ist. — *Q. e. d.*

Was, beiläufig bemerkt, das Zeichen $\mp$ im Nenner der Formel (15.) betrifft, so gilt entweder für *sämmtliche* ξ das $-$ Zeichen, oder aber für *sämmtliche* ξ das $+$ Zeichen; ersteres, falls die Puncte 1, 2, 3, 4, 5, ... *ausserhalb* der Stelle AA' liegen, letzteres, falls diese Puncte *zwischen* A und A' sich befinden.

Das Resultat dieser ganzen Untersuchung lässt sich schliesslich etwa folgendermassen zusammenfassen: *Es repräsentire $\mathfrak{R}$ den von irgend zwei Kugelflächen (τ) und (τ_0) des dipolaren Systems begrenzten Raum; und dabei mag dahingestellt bleiben, ob diese beiden Flächen ineinander oder nebeneinander liegen; sodass also unter $\mathfrak{R}$, je nach Umständen, entweder ein schaalenförmiger Raum, oder aber der unendliche Aussenraum der beiden Flächen zu verstehen ist. Ferner sei α ein auf der x-Axe dieses Systems beliebig gegebener Punct, und β sein Spiegelbild in Bezug auf die Fläche (τ).*

Bezeichnet man alsdann einen dieser Puncte α, β *mit* 1, *und zwar der Art, dass die beiden Differenzen*

(16.) $(\vartheta_1 - \tau)$ *und* $(\tau_0 - \tau)$ *einerlei Vorzeichen besitzen;*

und construirt man ferner das zu 1 *gehörige System von Spiegelpuncten:*

(17.) $1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - 4 - (\tau_0) - 5 -$ etc. etc.,

so wird der Ausdruck:

$$(18.) \qquad \Phi = K\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \xi_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} + - \cdots\right),$$

wo die T_j *die reciprocen Entfernungen eines variablen Punctes* (x, y, z) *von den festen Puncten* j *vorstellen sollen, eine Function von* (x, y, z), *und zwar eine Potentialfunction des gegebenen Raumes* $\mathfrak{R}$ *sein. Zugleich wird diese Function den Bedingungen entsprechen:*

$$(19.\ a) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = K \frac{\partial}{\partial N}\left(\xi_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha}\right), \text{ auf der Fläche } (\tau),$$

$$(19.\ b) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0, \text{ auf der Fläche } (\tau_0).$$

Dabei bezeichnet das K *eine beliebig gegebene Constante.*

Zusatz. — Insbesondere ist durch die vorhergehende Untersuchung constatirt, *dass sämmtliche Puncte* 2, 3, 4, 5, ... *ausserhalb des Raumes* $\mathfrak{R}$ *liegen*, und dass ihre Coordinaten, von denen des Punctes 1 aus, sich bestimmen mittelst der Formeln:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \text{etc. etc.}$$

und der Formeln:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= 2\tau - \vartheta_1, & \vartheta_3 &= 2\tau_0 - 2\tau + \vartheta_1, \\ \vartheta_4 &= 4\tau - 2\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_5 &= 4\tau_0 - 4\tau + \vartheta_1, \\ \vartheta_6 &= 6\tau - 4\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_7 &= 6\tau_0 - 6\tau + \vartheta_1, \\ &\text{etc. etc.} & &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

[Vgl. (9.), (10.) p. 171.] Ordnet man ferner die ϑ-Coordinaten jener Puncte und die beiden Constanten τ, τ_0 ihrer Grösse nach, so erhält man, wie ebenfalls aus den vorhergehenden Untersuchungen sich ergiebt, [vgl. (A″.), (B″.) p. 171] folgende Reihe:

$$\cdots \vartheta_7 \lessgtr \vartheta_5 \lessgtr \vartheta_3 \lessgtr \tau_0 \lessgtr \tau \lessgtr \vartheta_2 \lessgtr \vartheta_4 \lessgtr \vartheta_6 \cdots$$

wo entweder *durchweg* das obere Zeichen (<), oder aber *durchweg* das untere Zeichen (>) gilt, ersteres, falls die beiden Differenzen (16.) *negativ*, letzteres, falls sie *positiv* sind.

§ 9.

Weitere Specialisirung des zuletzt erhaltenen Satzes.

Wir wollen jetzt den Punct α, der auf der x-Axe *beliebig* gegeben sein sollte, längs dieser x-Axe *ins Unendliche* rücken lassen, wobei gleichzeitig β in das Centrum c der Kugelfläche (τ) rücken wird. Solches ausgeführt, ist $\vartheta_\alpha = 0$ [vgl. p. 106], und $\vartheta_\beta = 2\tau$ [vgl. z. B. p. 101]. Hieraus folgt

$$\text{(A.)} \qquad \frac{\tau_0 - \tau}{\vartheta_\alpha - \tau} = \frac{\tau_0 - \tau}{-\tau} = 1 - \frac{\tau_0}{\tau},$$

$$\text{(B.)} \qquad \frac{\tau_0 - \tau}{\vartheta_\beta - \tau} = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau} = \frac{\tau_0}{\tau} - 1,$$

Nach (16.) ist nun zum Puncte 1 der Punct α zu erwählen, falls der Quotient (A.) positiv ist, hingegen der Punct β, falls (B.) positiv ist. Mit Rücksicht auf die hier für (A.) und (B.) gegebenen Ausdrücke ergiebt sich also, *dass für* 1 *der Punct* α *oder* β *zu nehmen sein wird, je nachdem* $\frac{\tau_0}{\tau} < 1$ *oder* > 1 *ist.*

Gleichzeitig wird, falls man jenen Punct α längs der x-Axe ins Unendliche rücken lässt, die rechte Seite der Formel (19. a) übergehen in

$$\frac{K \cos(\mathsf{N}, x)}{a}, \quad \text{[vgl. den Satz p. 165].}$$

Führt man daher an Stelle der Constanten K eine neue Constante G ein mittelst der Relation $K = aG$, so gelangt man durch die in Rede stehende Specialisirung zu folgendem Satz:

Theorem. — *Es repräsentire* $\mathfrak{R}$ *den von irgend zwei Kugelflächen* (τ) *und* (τ_0) *des dipolaren Systems begrenzten Raum, wobei wieder dahingestellt sein mag, ob die beiden Flächen ineinander oder nebeneinander liegen, ob also* $\mathfrak{R}$ *selber ein schaalenförmiger Raum, oder aber der unendliche Aussenraum der beiden Flächen ist. Ferner bezeichne* 1 *entweder den unendlich fernen Punct der* x-*Axe, oder aber das Centrum* c *der Kugelfläche* (τ), *je nachdem der Quotient* $\frac{\tau_0}{\tau} < 1$ *oder* > 1 *ist. Construirt man alsdann die zu diesem Punct* 1 *gehörigen Spiegelpuncte:*

$$\text{(20.)} \quad 1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - 4 - (\tau_0) - 5 - \text{etc. etc.},$$

so wird der Ausdruck:

$$\text{(21.)} \quad \Phi = Ga\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \xi_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} + - \cdots\right),$$

wo T_j die reciproce Entfernung eines variablen Punctes (x, y, z) vom festen Punct j vorstellen soll, eine Function von (x, y, z), und zwar eine Potentialfunction des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$ sein. Gleichzeitig wird diese Function den Bedingungen entsprechen:

$$(22.\,a)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = G \cos(\mathsf{N}, x),\ \textit{auf der Fläche}\ (\tau),$$

$$(22.\,b)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = 0,\ \textit{auf der Fläche}\ (\tau_0).$$

Dabei bezeichnet G eine beliebig gegebene Constante.

Zusatz. — Hiebei ist, wie aus dem Zusatze p. 174 sich ergiebt, noch Folgendes zu bemerken. *Die Puncte* 2, 3, 4, 5, ... *liegen sämmtlich auf der x-Axe* und *ausserhalb des Raumes* $\mathfrak{R}$. Und die Coordinaten dieser Puncte bestimmen sich, von denen des Punctes 1 aus, mittelst der Formeln:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \text{etc. etc.},$$

und der Formeln:

$$\begin{array}{ll}
\vartheta_2 = 2\tau - \vartheta_1, & \vartheta_3 = 2\tau_0 - 2\tau + \vartheta_1, \\
\vartheta_4 = 4\tau - 2\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_5 = 4\tau_0 - 4\tau + \vartheta_1, \\
\vartheta_6 = 6\tau - 4\tau_0 - \vartheta_1, & \vartheta_7 = 6\tau_0 - 6\tau + \vartheta_1, \\
\text{etc. etc.} & \text{etc. etc.}
\end{array}$$

Ordnet man ferner die ϑ-Coordinaten dieser Puncte und die Constanten τ, τ_0 ihrer Grösse nach, so erhält man die Reihe:

$$\cdots\, \vartheta_7 \lesseqgtr \vartheta_5 \lesseqgtr \vartheta_3 \lesseqgtr \tau_0 \lesseqgtr \tau \lesseqgtr \vartheta_2 \lesseqgtr \vartheta_4 \lesseqgtr \vartheta_6 \lesseqgtr \cdots,$$

wo entweder *durchweg* das obere, oder aber *durchweg* das untere Zeichen gilt.

§ 10.

Wiederaufnahme der früher (p. 113) behandelten hydrodynamischen Aufgabe.

Bei jener Aufgabe hatten wir für das *Geschwindigkeitspotential* Φ *der Flüssigkeit* die Bedingungen erhalten:

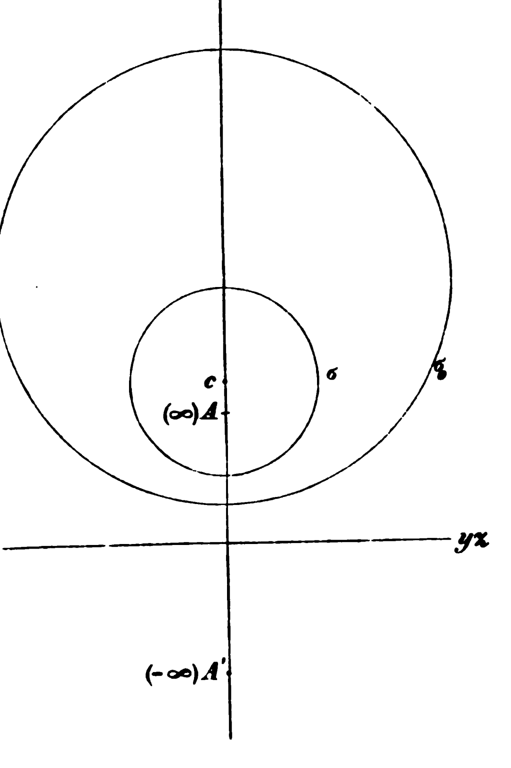
$$(23.)\qquad \Phi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ \textit{stetig},\ \text{und}\ \Delta\Phi = 0,\ \text{im Raume}\ \mathfrak{R};$$

$$(24.\,a)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = G\cos(\mathsf{N}, x),\ \text{auf der Fläche}\ \sigma\ \text{oder}\ (\tau);$$

$$(24.\,b)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{N}} = 0,\ \text{auf der Fläche}\ \sigma_0\ \text{oder}\ (\tau_0);\ [\text{vgl. (10.), (11. a, b) p. 116}].$$

Dabei repräsentirt $\mathfrak{R}$ einen *schaalenförmigen* Raum, der begrenzt ist von den beiden Kugelflächen σ und σ_0. Und diese Flächen können angesehen werden als zwei Kugelflächen (τ) und (τ_0) eines gewissen

dipolaren Systems. Die Mittelpuncte c und c_0 dieser Kugelflächen liegen beide auf der vertikal nach oben laufenden x-Axe, und zwar c *oberhalb* des Poles $A(\vartheta = +\infty)$, und c_0 *oberhalb* c. Vgl. die beistehende Figur. Demgemäss sind z. B.



$$(25.)\quad \begin{cases} \tau \textit{ selber, und } \delta = \tau - \tau_0 \\ \textit{positiv, mithin } \frac{\tau_0}{\tau} < 1; \end{cases}$$

woraus folgt, dass

$$(26.)\quad \begin{cases} q = e^{-\tau}, \text{ und} \\ f = e^{-\delta} = e^{-(\tau-\tau_0)} \end{cases}$$

positive ächte Brüche sind.

Das den Bedingungen (23.), (24. a, b) entsprechende Geschwindigkeitspotential Φ wird nun nach dem zuletzt gefundenen Theorem (21.) den Werth haben:

$$(27.)\quad \Phi = Ga\left(\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \xi_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \xi_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \xi_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} \cdots\right).$$

Dabei bezeichnen $T_2, T_3, T_4, \ldots$ die reciprocen Abstände des variablen im Raume $\mathfrak{R}$, d. i. in der Flüssigkeit liegenden Punctes (x, y, z) von gewissen festen Puncten $2, 3, 4, \ldots$. Diese letztern liegen sämmtlich auf der x-Axe, und können, auf Grund des genannten Theorems, ihrer Lage nach sofort näher bezeichnet werden.

Nach (25.) ist nämlich im gegenwärtigen Fall $\frac{\tau_0}{\tau} < 1$. Zufolge jenes Theorems (p. 175), wird daher der Punct 1 auf der x-Axe *im Unendlichen* liegen, mithin $\omega_1 = \vartheta_1 = 0$ sein; während die übrigen Puncte 2, 3, 4, 5, ... dem Schema zu entsprechen haben:

$$(28.)\quad 1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - 4 - (\tau_0) - \text{etc. etc.}$$

Da 1 im Unendlichen liegt, so wird also z. B. der Punct 2, diesem Schema entsprechend, identisch sein mit dem Centrum c der Kugelfläche (τ).

Bemerkung. — Behufs der weiteren Betrachtungen erscheint es zweckmässig, Alles, was in Betreff der geometrischen Lage und analytischen Bestimmung der Puncte 1, 2, 3, 4, ... bekannt ist, hier zusammenzustellen. Auf Grund des Zusatzes (p. 176) wissen wir, *dass die Puncte 2, 3, 4, 5, ... sämmtlich auf der x-Axe, und **ausserhalb** des schaalenförmigen Raumes $\mathfrak{R}$ liegen.* Da ferner 1 auf der x-Axe im *Unendlichen* sich befindet, mithin $\omega_1 = \vartheta_1 = 0$ ist, so ergeben sich aus jenem Zusatz die Formeln:

$$(\alpha.) \qquad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \ldots\ldots = Null,$$

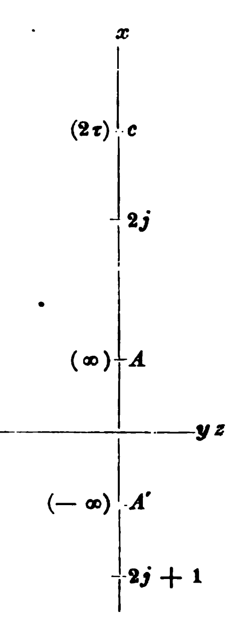
ferner die Formeln:

$$(\beta.) \qquad \begin{array}{ll} \vartheta_2 = 2\tau, & \vartheta_3 = -2\delta, \\ \vartheta_4 = 2\tau + 2\delta, & \vartheta_5 = -4\delta, \\ \vartheta_6 = 2\tau + 4\delta, & \vartheta_7 = -6\delta, \\ \vartheta_8 = 2\tau + 6\delta, & \vartheta_9 = -8\delta, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

wo $\delta = \tau - \tau_0$ ist. Desgleichen ergiebt sich die Formel:

$$(\gamma.) \qquad \cdots \vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 < \tau_0 < \tau < \vartheta_2 < \vartheta_4 < \vartheta_6 \cdots$$

In der That ist in dieser letzten Formel im gegenwärtigen Fall durchweg das Zeichen $<$ am Platze; denn nach (25.) ist $\tau_0 < \tau$. Aus der Formel (γ.) ersieht man nun sofort, dass die Puncte $2j$, d. i. 2, 4, 6, ... *innerhalb* der Kugelfläche (τ), und dass andrerseits die Puncte $2j + 1$, d. i. 3, 5, 7, ... *ausserhalb* der Kugelfläche (τ_0) liegen.



Uebrigens kann man die Lagen dieser Puncte innerhalb der einen und ausserhalb der andern Kugelfläche leicht noch *genauer* angeben. Da nämlich τ und δ *positiv* sind (25.), so folgt aus (β.):

$$(\varepsilon.) \qquad 2\tau = \vartheta_2 < \vartheta_4 < \vartheta_6 < \vartheta_8 < \cdots < \infty.$$

Nun ist aber 2τ die ϑ-Coordinate des Centrums c der Kugelfläche (τ), andrerseits ∞ die ϑ-Coordinate des Poles A. Somit folgt aus (ε.), unter Rücksichtnahme auf (α.), *dass sämmtliche Puncte $2j$, d. i. 2, 4, 6, 8, ... zwischen c und A liegen; wie solches auch angedeutet ist in der nebenstehenden Figur.*

Ferner folgt aus (β.), weil δ *positiv* ist, sofort:

$$(\zeta.) \qquad -\infty < \cdots\cdot < \vartheta_9 < \vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 < 0.$$

Nun ist aber $-\infty$ die ϑ-Coordinate des Poles A', während andrerseits die 0 angesehen werden kann als die ϑ-Coordinate eines auf der x-Axe in *unendlicher Tiefe* gelegenen Punctes. Somit folgt aus (ζ.), unter Rücksichtnahme auf (α.), dass alle Puncte $2j + 1$, d. i. 3, 5, 7, 9, ... ***unterhalb*** des Poles A' liegen; *wie solches auch angedeutet sich findet in der nebenstehenden Figur.*

§ 11.

Berechnung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit.

Nach (25.) p. 105 ist ganz allgemein $\xi = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}$; sodass also die Formel (27.) auch so geschrieben werden kann:

$$(28.)\qquad \Phi = 2a^2 G\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right).$$

Substituirt man aber dieses Φ in den Ausdruck der *lebendigen Kraft der Flüssigkeit:*

$$(29.)\qquad T = -\frac{\varrho G}{2}\iint \Phi \cos(R, x)\, d\sigma, \qquad \text{[vgl. p. 116 (14.)]},$$

so erhält man:

$$(30.)\qquad T = -\varrho a^2 G^2\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial U_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial U_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial U_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right),$$

wo alsdann die U's folgende Bedeutungen haben:

$$(31.)\qquad \begin{aligned} U_{2j} &= \iint T_{2j} \cos(R, x)\, d\sigma, \\ U_{2j+1} &= \iint T_{2j+1} \cos(R, x)\, d\sigma, \end{aligned}$$

die Integration [ebenso wie in (29.)] ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der inneren Kugelfläche σ oder (τ). Dabei bezeichnet R den nach einem solchen Element $d\sigma$ hinlaufenden Kugelradius, und (R, x) den Neigungswinkel dieses Radius gegen die positive x-Axe. Ferner sind in (31.) unter T_{2j} und T_{2j+1} die reciprocen Abstände des Elements $d\sigma$ von den festen Puncten $2j$ und $2j+1$ zu verstehen.

Bringt man auf die Integrale (31.) den Hülfssatz $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ p. 133 in Anwendung, und beachtet man dabei die in der Figur p. 178 markirte Lage der Puncte $2j$ und $2j+1$, so erhält man:

$$(32.)\qquad \begin{aligned} U_{2j} &= \frac{4\pi}{3} r_{2j} \cos(r_{2j}, x) &&= -\frac{4\pi}{3} r_{2j}, \\ U_{2j+1} &= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3 r_{2j+1} \cos(r_{2j+1}, x) &&= -\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r_{2j+1}^2}; \end{aligned}$$

hier repräsentiren r_{2j} und r_{2j+1} die vom Centrum c der Kugelfläche σ oder (τ) nach den Puncten $2j$ und $2j+1$ hinlaufenden Linien; sodass also z. B. die Winkel (r_{2j}, x) und (r_{2j+1}, x) sämmtlich $= 180^0$ sind. Aus (32.) folgt nun sofort:

$$(33.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}}, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{8\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\left(\frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3\frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Nach der Figur p. 178 ist offenbar $r_{2j} = x_c - x_{2j}$ und $r_{2j+1} = x_c - x_{2j+1}$, mithin:

$$\frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} = - \frac{\partial x_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} = \frac{2a}{\psi_{2j}},$$

$$\frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} = - \frac{\partial x_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} = \frac{2a}{\psi_{2j+1}}, \quad \text{[vgl. p. 103, } (\gamma.)].$$

Somit folgt aus (33.):

$$(34.) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}} \frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= - \frac{8\pi a}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\right)^3, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= + \frac{16\pi a}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{R}{r_{2j+1}}\right)^3. \end{aligned}$$

Nach (β.) p. 178 ist: $\vartheta_{2j} = 2\tau + (2j-2)\delta$, und $\vartheta_{2j+1} = -2j\delta$; folglich:

$$\psi_{2j} = (e^{\tau+(j-1)\delta} - e^{-\tau-(j-1)\delta})^2,$$

$$\psi_{2j+1} = (e^{j\delta} - e^{-j\delta})^2, \quad \text{[vgl. p. 103, } (\alpha.)].$$

Nimmt man von diesen Ausdrücken die positiven Quadratwurzeln, und beachtet dabei, dass τ, δ, j *positiv* sind, so ergiebt sich:

$$\sqrt{\psi_{2j}} = e^{\tau+(j-1)\delta} - e^{-\tau-(j-1)\delta} = e^{+\tau+(j-1)\delta}(1 - e^{-2\tau-(2j-2)\delta}),$$

$$\sqrt{\psi_{2j+1}} = e^{j\delta} - e^{-j\delta} = e^{j\delta}(1 - e^{-2j\delta}),$$

also, falls man Rücksicht nimmt auf die in (26.) eingeführte Bezeichnungsweise:

$$(a.) \qquad \begin{aligned} \sqrt{\psi_{2j}} &= \frac{1 - q^2 f^{2j-2}}{q f^{j-1}}, \\ \sqrt{\psi_{2j+1}} &= \frac{1 - f^{2j}}{f^j}. \end{aligned}$$

Bringt man ferner die allgemeine Formel

$$E = \pm \frac{2a(e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_2})}{(e^{\vartheta_1} - 1)(e^{\vartheta_2} - 1)}, \quad \text{[p. 103, } (\varepsilon.)]$$

auf die Entfernung r_{2j+1} d. i. auf die Entfernung $(c, 2j+1)$ in Anwendung, und beachtet man dabei, dass $\vartheta_c = 2\tau$ und $\vartheta_{2j+1} = -2j\delta$ ist, und dass τ, δ, j sämmtlich *positiv* sind, so erhält man:

$$r_{2j+1} = \frac{2a(e^{2\tau} - e^{-2j\delta})}{(e^{2\tau} - 1)(1 - e^{-2j\delta})} = \frac{2a(1 - e^{-2\tau-2j\delta})}{(1 - e^{-2\tau})(1 - e^{-2j\delta})},$$

oder mit Benutzung der in (26.) eingeführten Bezeichnungen:

$$(b.) \qquad r_{2j+1} = \frac{2a(1 - q^2 f^{2j})}{(1 - q^2)(1 - f^{2j})}.$$

Dividirt man aber diese Formel, und die von früher her bekannte Formel

(c.) $$R = \frac{2aq}{1-q^2}, \quad \text{[vgl. (f.) p. 136]},$$

durcheinander, so folgt:

(d.) $$\frac{R}{r_{2j+1}} = \frac{q(1-f^{2j})}{1-q^2 f^{2j}}.$$

Substituirt man jetzt die Werthe (a.) und (d.) in (34.), so erhält man:

(35.) $$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\frac{\partial U_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{8\pi a}{3}\left(\frac{qf^{j-1}}{1-q^2 f^{2j-2}}\right)^3, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\frac{\partial U_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{16\pi a}{3}\left(\frac{qf^j}{1-q^2 f^{2j}}\right)^3. \end{aligned}$$

Und substituirt man nun ferner diese Werthe (35.) in die Formel (30.), so ergiebt sich:

(36.) $$T = \varrho a^2 G^2 \frac{8\pi a}{3}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{q}{1-q^2}\right)^3 + \left(\frac{qf}{1-q^2f^2}\right)^3 + \left(\frac{qf^2}{1-q^2f^4}\right)^3 + \cdots \\ &+2\left(\frac{qf}{1-q^2f^2}\right)^3 + 2\left(\frac{qf^2}{1-q^2f^4}\right)^3 + 2\left(\frac{qf^3}{1-q^2f^6}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right\},$$

wo die Glieder *erster* Zeile den Puncten $2j$, die der *zweiten* Zeile den Puncten $2j+1$ entsprechen. Diese Formel (36.) reducirt sich sofort auf:

(37.) $$T = \frac{\pi\varrho}{3}(2a)^3 G^2 \left\{\left(\frac{q}{1-q^2}\right)^3 + 3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{qf^j}{1-q^2f^{2j}}\right)^3\right\}.$$

Und hieraus folgt, falls man für $2a$ den aus (c.) entspringenden Werth: $2a = \frac{R(1-q^2)}{q}$ substituirt:

(38.) $$T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 G^2 \left\{1 + 3(1-q^2)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-q^2f^{2j}}\right)^3\right\}.$$

Verschiedene Darstellungen der lebendigen Kraft der Flüssigkeit. — Bezeichnet man in (38.) den in der geschweiften Parenthese enthaltenen Ausdruck mit F, und beachtet man, dass G nur Abbreviatur ist für $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, so erhält man:

(39.) $$T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F G^2 = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2,$$

wo alsdann F die Bedeutung hat:

(40.) $$F = 1 + 3(1-q^2)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-q^2f^{2j}}\right)^3.$$

Demgemäss kann dieses F auch so dargestellt werden:

$$(41.)\quad F = 1 + 3\,(1-q^2)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty} f^{3j}\,(1 + 3q^2 f^{2j} + 6q^4 f^{4j} + \cdots),$$

oder mehr übersichtlich geschrieben, auch so:

$$(42.)\quad F = 1 + 3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{1\cdot 2}{2}(qf^j)^3 + \frac{2\cdot 3}{2}(qf^j)^5 + \frac{3\cdot 4}{2}(qf^j)^7 + \cdots\right),$$

oder, was dasselbe, auch so:

$$(43.)\quad F = 1 + 3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}(qf^j)^{2n+1}\right),$$

oder, falls man jetzt die Summation nach j wirklich ausführt, auch so:

$$(44.)\quad F = 1 + 3\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^3 \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{q^{2n+1}f^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}\right).$$

Der analytische Charakter des Ausdrucks der lebendigen Kraft. — Der in dem Ausdruck (39.) der lebendigen Kraft enthaltene Factor F ist, zufolge der Formeln (40.) bis (44.), eine Function von q und f; und diese Argumente q und f waren definirt durch die Formeln (26.). Setzt man also:

$$(45.)\quad q = e^{-\tau}, \quad \text{und ebenso:}\quad q_0 = e^{-\tau_0},$$

so hat f den Werth:

$$(46.)\quad f = \frac{q}{q_0}.$$

Und man kann demgemäss also jenes in (39.) enthaltene F als eine Function der beiden Argumente q und q_0 ansehen, was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$(47.)\quad F = F(q, q_0).$$

Diese beiden Argumente q und q_0 reduciren sich aber in Wirklichkeit auf *ein einziges* Argument, nämlich auf die *Centraldistanz* E der beiden Kugelflächen (τ) und (τ_0); wie sich solches sowohl durch geometrische Anschauung, als auch durch analytische Untersuchung leicht darthun lässt. Ich werde der Bequemlichkeit halber den letztern (d. i. den analytischen) Weg einschlagen.

Bezeichnet man für den Augenblick die x-Coordinaten der beiden Kugelflächencentra c und c_0 im Coordinatensystem (x, y, z) mit x und x_0, und beachtet man, dass c_0 *oberhalb* c liegt (Figur p. 177), so ergiebt sich für jene Centraldistanz E der Werth:

$$E = x_0 - x,$$

und gleichzeitig ergiebt sich:

$$x = a\,\frac{e^{2\tau}+1}{e^{2\tau}-1}, \quad x_0 = a\,\frac{e^{2\tau_0}+1}{e^{2\tau_0}-1}, \text{ [vgl. } (\beta.) \text{ p. 103]},$$

oder unter Anwendung der Grössen q, q_0 (45.):

$$x = a\,\frac{1+q^2}{1-q^2}, \qquad x_0 = a\,\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2}.$$

Somit folgt:

$$\text{(f.)} \qquad E = -a\,\frac{1+q^2}{1-q^2} + a\,\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2}.$$

Ferner ist nach (c.) p. 181:

$$\text{(g.)} \qquad a = R\,\frac{1-q^2}{2q}, \qquad a = R_0\,\frac{1-q_0^2}{2q_0},$$

wo R und R_0 die *Radien* der beiden Kugelflächen vorstellen. Substituirt man jetzt diese beiden Werthe von a in die Formel (f.), und zwar den einen in *erster*, den andern in *zweiter* Stelle, so erhält man:

$$\text{(48. a)} \qquad E = -R\,\frac{1+q^2}{2q} + R_0\,\frac{1+q_0^2}{2q_0};$$

andererseits ergiebt sich aus den beiden Formeln (g.) durch Subtraction:

$$\text{(48. b)} \qquad 0 = -R\,\frac{1-q^2}{2q} + R_0\,\frac{1-q_0^2}{2q_0}.$$

Die Radien R und R_0 der beiden Kugelflächen sind aber gegebene Constanten. *Und die Formeln* (48. a, b) *zeigen also, dass die beiden darin enthaltenen Argumente q und q_0 lediglich von E abhängen.* Q. e. d. Demgemäss wird also jenes F (47.) in letzter Instanz lediglich eine Function von E sein, was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$\text{(49.)} \qquad F = F(E).$$

Die Grössen q und q_0 sind nach (48. a, b) lediglich Functionen von E. Demgemäss bietet sich die Aufgabe dar, q und q_0 wirklich durch E auszudrücken, und ferner die *Ableitungen* von q und q_0 nach E zu berechnen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Formeln (48. a, b) einmal addiren, das andere Mal subtrahiren. Alsdann ergiebt sich:

$$(\alpha.) \qquad \begin{aligned} E &= -R\,\frac{1}{q} + R_0\,\frac{1}{q_0}, \\ E &= -Rq + R_0 q_0. \end{aligned}$$

Differenzirt man jetzt diese beiden Formeln nach E, und bezeichnet man dabei die Differentialquotienten von q und q_0 nach E, respective

mit q', q'_0, so erhält man:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} 1 &= R\frac{q'}{q^2} - R_0\frac{q'_0}{q_0^2}, \\ 1 &= -Rq' + R_0 q'_0. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (α.), falls man einmal R_0, das andere Mal R eliminirt:

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} R\,(q_0^2 - q^2) &= Eq\,(1 - q_0^2), \\ R_0\,(q_0^2 - q^2) &= Eq_0\,(1 - q^2). \end{aligned}$$

In gleicher Weise ergiebt sich aus den Formeln (β.):

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} R\,(q_0^2 - q^2)\,q' &= q^2\,(1 + q_0^2), \\ R_0\,(q_0^2 - q^2)\,q'_0 &= q_0^2\,(1 + q^2). \end{aligned}$$

Dividirt man jetzt die Formeln (δ.) durch die Formeln (γ.), so erhält man:

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\log q}{dE} = \dfrac{q'}{q} = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{1 + q_0^2}{1 - q_0^2}, \\[2ex] \dfrac{d\log q_0}{dE} = \dfrac{q'_0}{q_0} = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{1 + q^2}{1 - q^2}. \end{cases}$$

Nun ist nach (46.): $\log f = \log q - \log q_0$. Somit folgt aus ($\varepsilon$.):

$$(\zeta.)\qquad \frac{d\log f}{dE} = \frac{1}{E}\,\frac{2\,(q_0^2 - q^2)}{(1 - q^2)\,(1 - q_0^2)}.$$

Ferner ergiebt sich aus (α.), falls man einmal q_0, das andere Mal q eliminirt:

$$(\eta.)\qquad q^2 + \left(\frac{E^2 + R^2 - R_0^2}{ER}\right) q + 1 = 0,$$

$$(\vartheta.)\qquad q_0^2 - \left(\frac{E^2 + R_0^2 - R^2}{ER_0}\right) q_0 + 1 = 0.$$

Die quadratische Gleichung (η.), welche q als Function von E **bestimmt**, besitzt im Ganzen zwei Wurzeln, deren Product, zufolge (η.), $= 1$ **sein** muss. Da nun die *eine* dieser beiden Wurzeln das gesuchte q **repräsentirt**, mithin positiv und < 1 ist [vgl. (26.)], so wird die *andere* **ebenfalls** positiv, aber > 1 sein. Demgemäss können wir also **sagen**: ***Die lediglich von E abhängende Function q bestimmt sich analytisch als die kleinere der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung*** (η.). ***Und ebenso wird offenbar die ebenfalls nur von E abhängende Function*** q_0 ***analytisch zu bezeichnen sein als die kleinere der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung*** (ϑ.). ***Ausserdem gelten für die Differentialquotienten dieser beiden Functionen die in*** (ε.) ***aufgeführten, durch Einfachheit ausgezeichneten Formeln.***

Von Wichtigkeit ist es nun für unsere weitern **Betrachtungen**, das *Vorzeichen* der in (49.) angegebenen Function $F = F(E)$, und

ebenso das der abgeleiteten Function $F'(E)$ zu untersuchen. Ich werde zeigen, dass diese Vorzeichen stets *positiv* sind.

Die Formel (40.) lässt sich darstellen:

$$(50.)\qquad F = 1 + 3\,(\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 + \cdots + \varphi_j^3 + \cdots\cdots),$$

wo alsdann φ_j die Bedeutung hat:

$$(51.)\qquad \varphi_j = \frac{(1-q^2)\,f^j}{1-q^2 f^{2j}}.$$

Nun sind aber q, q, f *positive ächte Brüche* [vgl. (26.) und (45.)]. Somit folgt aus (51.), dass die φ_j sämmtlich *positiv* sind. Gleiches gilt somit auch von F selber (50.).

Was ferner die Differentialquotienten nach E betrifft, so ergiebt sich aus (51.):

$$\frac{d\log\varphi_j}{dE} = \frac{\partial\log\varphi_j}{\partial f}\frac{df}{dE} + \frac{\partial\log\varphi_j}{\partial q}\frac{dq}{dE},$$

$$= \left(\frac{j}{f} + \frac{2jq^2f^{2j-1}}{1-q^2f^{2j}}\right)\frac{df}{dE} + \left(-\frac{2q}{1-q^2} + \frac{2qf^{2j}}{1-q^2f^{2j}}\right)\frac{dq}{dE},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(51.\,\mathrm{a})\qquad \frac{d\log\varphi_j}{dE} = \frac{j(1+q^2f^{2j})}{(1-q^2f^{2j})}\frac{d\log f}{dE} + \frac{-2q^2(1-f^{2j})}{(1-q^2f^{2j})(1-q^2)}\frac{d\log q}{dE}.$$

Substituirt man aber hier die früher gefundenen Werthe:

$$\frac{d\log q}{dE} = \frac{1}{E}\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2},$$

$$\frac{d\log f}{dE} = \frac{1}{E}\frac{2\,(q_0^2-q^2)}{(1-q^2)(1-q_0^2)},\ \text{[vgl. } (\varepsilon.),\ (\zeta.)\text{ p. 184]},$$

so erhält man:

$$(52.)\qquad \frac{d\log\varphi_j}{dE} = \frac{2\,(q_0^2-q^2)\,\mathfrak{U}}{E\,(1-q^2)\,(1-q_0^2)\,(1-q^2f^{2j})},$$

wo $\mathfrak{U}$ zur augenblicklichen Abkürzung steht für den Ausdruck:

$$\mathfrak{U} = j\,(1+q^2f^{2j}) - (1+q_0^2)\,\frac{q^2\,(1-f^{2j})}{q_0^2-q^2}.$$

Dividirt man das zweite Glied dieses Ausdrucks im Zähler sowohl wie im Nenner mit q_0^2, und beachtet dabei, dass $\frac{q}{q_0} = f$ ist, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{U} = j\,(1+q^2f^{2j}) - (1+q_0^2)\,\frac{f^2\,(1-f^{2j})}{1-f^2},$$

oder, weil $q_0 f = q$ ist:

$$(\xi.)\qquad \mathfrak{U} = j(1 + q^2 f^{2j}) - (f^2 + q^2)\,\frac{1 - f^{2j}}{1 - f^2}\cdot$$

Der am Ende dieses Ausdrucks stehende Bruch ist $= 1 + f^2 + f^4 \cdots + f^{2j-2}$. Somit folgt:

$$(53.)\qquad \mathfrak{U} = j(1 + q^2 f^{2j}) - (f^2 + f^4 + f^6 \cdots + f^{2j}) - (q^2 + q^2 f^2 + q^2 f^4 \cdots + q^2 f^{2j-2}).$$

Versteht man nun aber unter $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4, \ldots \mathfrak{P}_{2j-2}$ folgende Producte:

$$(54.)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{P}_0 &= (1 - q^2)(1 - f^{2j}) &&= (1 + q^2 f^{2j}) - (q^2 + f^{2j}),\\
\mathfrak{P}_2 &= (1 - q^2 f^2)(1 - f^{2j-2}) &&= (1 + q^2 f^{2j}) - (q^2 f^2 + f^{2j-2}),\\
\mathfrak{P}_4 &= (1 - q^2 f^4)(1 - f^{2j-4}) &&= (1 + q^2 f^{2j}) - (q^2 f^4 + f^{2j-4}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{P}_{2j-2} &= (1 - q^2 f^{2j-2})(1 - f^2) &&= (1 + q^2 f^{2j}) - (q^2 f^{2j-2} + f^2),
\end{aligned}$$

und bildet von all diesen j Producten die Summe, so erhält man sofort:

$$(55.)\qquad \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_4 \cdots + \mathfrak{P}_{2j-2} = \mathfrak{U},$$

wo $\mathfrak{U}$ den in (53.) angegebenen Ausdruck vorstellt. Da nun q, q_0, f positive ächte Brüche sind, und j eine der Zahlen 1, 2, 3, ... repräsentirt [vgl. (50.)], so sind die in (54.) gebildeten Producte $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4, \ldots \mathfrak{P}_{2j-2}$ sämmtlich *positiv*. Somit folgt aus (55.), dass $\mathfrak{U}$ ebenfalls *positiv* ist.

Gleiches gilt daher, zufolge der Formel (52.) auch von $\frac{d \log \varphi_j}{dE}$. Denn es ist zu beachten, dass q, q_0, f positive ächte Brüche sind, dass ferner $q_0 > q$ ist*), und dass endlich E seiner geometrischen Bedeutung zufolge (als *Entfernung* der beiden Kugelcentra von einander) stets positiv ist. Wir gelangen somit zu dem Resultat, *dass die*

$$(56.)\qquad \varphi_j \ \textit{und}\ \frac{d \log \varphi_j}{dE},\ \textit{mithin auch die}\ \frac{d\varphi_j}{dE}$$

stets positiv sind. Gleiches gilt daher nach (50.) *auch von*

$$(57.)\qquad F\ \textit{selber, und von}\ \frac{dF}{dE}\cdot \qquad Q.\ e.\ d.$$

---

*) Nach (26.) und (45.) sind q, q_0, f *positive ächte Brüche*. Somit folgt aus der Formel (46.): $f = \frac{q}{q_0}$ sofort, dass $q_0 > q$ ist.

§ 12.

Zusammenstellung und Vervollständigung der über die lebendige Kraft der Flüssigkeit erhaltenen Resultate.

Das Hauptresultat unserer bisherigen Betrachtungen kann folgendermassen ausgedrückt werden: *Eine incompressible Flüssigkeit befinde sich innerhalb einer fest aufgestellten Kugelfläche vom Centrum c_0 und Radius R_0. Und im Innern dieser Flüssigkeit sei eine gegebene Kugel vom Centrum c und Radius R, unter dem Einfluss irgend welcher Ursachen, in einer translatorischen Bewegung begriffen, bei welcher c gegen c_0 fortschreitet* (vgl. die Figur p. 177). *Bezeichnet man die Geschwindigkeit, mit welcher c dem festen Centrum c_0 sich nähert, in irgend einem Augenblick mit G, ferner die augenblickliche Entfernung zwischen c und c_0 mit E, so wird alsdann in diesem Augenblick die lebendige Kraft T der Flüssigkeit den Werth haben:*

$$T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F(E) \cdot G^2, \quad \text{[vgl. (39.) und (49.)]}, \tag{58.}$$

wo ϱ die constante Dichtigkeit der incompressiblen Flüssigkeit vorstellt.

Denkt man sich insbesondere die Kugel mit einer constanten Geschwindigkeit G, beispielsweise mit der Geschwindigkeit $G = 1$, fortgeführt, so nimmt die Formel (58.) *die Gestalt an:*

$$T = K . F(E), \tag{59.}$$

wo K eine Constante vorstellt. Hieraus aber folgt, dass die lebendige Kraft T in diesem Falle beim weiteren Fortschreiten der Kugel fortwährend abnimmt, so lange bis das Centrum c dieser Kugel das feste Centrum c_0 erreicht hat. Denn während der in Rede stehenden Bewegung ist E in beständigem Abnehmen, also nach (57.) die Function $F = F(E)$ ebenfalls in beständigem Abnehmen begriffen.

b_0, β_0, G, c_0, α_0, a_0

Bezeichnet man irgend einen Durchmesser der *festen* Kugelfläche mit $a_0c_0b_0$, denkt man sich ferner auf diesem Durchmesser irgend zwei Puncte α_0 und β_0 markirt, zu beiden Seiten von c_0, und beide gleich weit von c_0 entfernt, und lässt man nun den Mittelpunct c der beweglichen Kugel längs dieses Durchmessers $a_0c_0b_0$ mit einer *constanten* Geschwindigkeit G fortschreiten, so wird die lebendige Kraft der Flüssigkeit in dem Augenblick, wo c die Stelle α_0 passirt, genau denselben Werth haben wie in dem späteren Zeitaugenblick, wo c die Stelle β_0 passirt. Solches ergiebt sich sofort aus der Formel (58.), nämlich aus dem

Umstande, dass in dieser Formel nur das *Quadrat* von G sich vorfindet. *Denkt man sich also, während c längs des Durchmessers* $a_0 c_0 b_0$ *mit constanter Geschwindigkeit fortgeführt wird, in jedem Augenblick im Puncte c ein Perpendikel auf jenem Durchmesser errichtet, dessen Länge den augenblicklichen Werth der lebendigen Kraft der Flüssigkeit angiebt, so werden all diese Perpendikel zusammengenommen eine zu* c_0 *symmetrische Curve bilden. Auch wird diese Curve in* c_0 *ihr Minimum haben, und von hier aus nach beiden Seiten in fortwährendem Steigen begriffen sein.*

Will man das Minimum jener Curve, d. h. ihre dem Punct c_0 entsprechende kleinste Ordinate berechnen, so hat man zunächst den Werth der Function $F = F(E)$ für $E = 0$ zu ermitteln. Setzt man aber in der quadratischen Gleichung (η.) p. 184:

$$q^2 + \left(\frac{E^2 + R^2 - R_0^2}{ER}\right) q + 1 = 0 \tag{60.}$$

das $E = 0$, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung, wie man leicht übersieht, $q = 0$ und $q = \infty$. Von diesen beiden Wurzeln ist die *Kleinere* zu nehmen [vgl. die Bemerkungen im Anschluss an jene Gleichung (η.) p. 184]. Folglich ist in diesem Fall $q = 0$. In gleicher Weise erhält man aus der quadratischen Gleichung (ϑ.) p. 184: $q_0 = 0$. Folglich erhält man:

$$q = 0, \qquad q_0 = 0, \quad \text{und} \quad f = \frac{q}{q_0} = \frac{0}{0}.$$

Der *wirkliche* Werth von f ergiebt sich aus (48. b.). Setzt man nämlich hier $q = q_0 = 0$, so folgt:

$$f = \frac{q}{q_0} = \frac{R}{R_0}.$$

Substituirt man aber diese Werthe von q, q_0, f in (44.), so erhält man den der Entfernung $E = 0$ entsprechenden Werth der Function $F = F(E)$. Und zwar findet man für denselben aus jener Formel (44.) sofort folgenden Ausdruck:

$$F(0) = 1 + 3\,\frac{f^3}{1 - f^3} = 1 + 3\,\frac{R^3}{R_0^3 - R^3}.$$

$$\text{d. i.} \quad F(0) = \frac{R_0^3 + 2R^3}{R_0^3 - R^3}.$$

Jener der Centraldistanz $E = 0$ entsprechende *Minimalwerth der lebendigen Kraft der Flüssigkeit* stellt sich daher nach (58.) folgendermassen dar:

$$T = \frac{\pi \varrho}{3}\,\frac{R^3 (R_0^3 + 2R^3)}{R_0^3 - R^3}\,G^2, \tag{61.}$$

wo R den Radius der Kugel, R_0 den Radius der die Flüssigkeit umschliessenden fest aufgestellten Kugelfläche und ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet, während G die Geschwindigkeit der Kugel repräsentirt.

Specieller Fall: Die Kugel sei unendlich klein, also $R = 0$. Alsdann sind die beiden Wurzeln der Gleichung (60.) für ein *beliebiges* E dargestellt durch $q = 0$ und $q = \infty$. Von diesen beiden Wurzeln ist die *kleinere* zu nehmen, mithin $q = 0$. Also:

$$q = 0, \quad \text{und} \quad f = \frac{q}{q_0} \quad \text{ebenfalls} = 0.$$

Diese Werthe in (44.) substituirt, erhält man:

$$F = F(E) = 1.$$

Demgemäss ergiebt sich aus (58.):

$$T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 G^2; \tag{62.}$$

also der Satz: *Denkt man sich längs eines Durchmessers $a_0 c_0 b_0$ der die Flüssigkeit umschliessenden festen Kugelfläche eine* unendlich kleine *Kugel mit einer* constanten *Geschwindigkeit G fortgeführt, so wird während dieser Bewegung die lebendige Kraft der Flüssigkeit* constant *bleiben, nämlich den Werth* (62.) *besitzen, wo das R den unendlich kleinen Radius der Kugel repräsentirt.* Genauer wird man also zu sagen haben, jener constante Werth der lebendigen Kraft sei gleich *Null.* — Jedenfalls werden die hier gemachten Angaben hinreichend auch dasjenige Verfahren andeuten, welches einzuschlagen, wenn die Kugel nicht unendlich klein, sondern nur *sehr* klein ist.

§ 13.

Die Resultante der auf die Kugel ausgeübten Druckkräfte.

Es handelt sich bei unserer Aufgabe (welche früher auf p. 113 in ausführlicher Weise angegeben wurde) um die Aufstellung der die Bewegung der Kugel beherrschenden Differentialgleichung:

$$M \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p, \quad \text{[vgl. (1.) p. 114]}, \tag{63.}$$

und namentlich um die Berechnung der Kraft X^p. Dieses X^p repräsentirt die x-Componente derjenigen Wirkung, welche auf die Kugel ausgeübt wird durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit, und stellt sich dar durch die Formel:

$$X^p = - X^j - \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^{-1} \frac{dT}{dt}, \quad \text{[vgl. (7.) p. 115]}. \tag{64.}$$

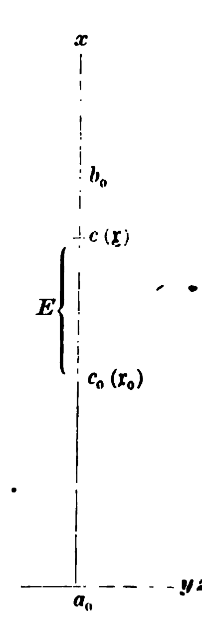
Diese Formel (64.) ist nun weiter zu entwickeln durch **Substitution** des für die lebendige Kraft erhaltenen Werthes:

$$(65.)\qquad T = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 F \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2, \quad \text{[vgl. (39.) p. 181].}$$

Wir beginnen dabei mit der Bemerkung, dass die Coordinate $\mathfrak{x}$ des Kugelmittelpunctes c nothwendiger Weise zu rechnen ist von einer *absolut festen* Marke aus; wie solches z. B. augenblicklich klar ist, falls man einen Blick auf die Gleichung (63.) wirft.

Bemerkung. — *Fehlerhaft* würde es also z. B sein, wenn man dieses $\mathfrak{x}$ rechnen wollte von der Aequatorialebene des dipolaren Systems aus, d. i. von derjenigen Ebene aus, welche im Vorhergehenden (z. B. in der Figur p. 177) mit yz bezeichnet ist. Denn von den beiden die Flüssigkeit begrenzenden Kugelflächen σ_0 und σ ist die eine allerdings *fest*, die andere aber *in Bewegung* begriffen. Und demgemäss wird sich das diesen beiden Kugelflächen entsprechende dipolare System von Augenblick zu Augenblick ändern, der Art, dass sowohl seine beiden Pole A und A', wie auch seine Aequatorialebene yz in *fortdauernder Bewegung* begriffen sind.

Um die Vorstellung zu fixiren, bezeichnen wir den vertikal von Unten nach Oben laufenden Durchmesser der *fest stehenden* Kugelfläche σ_0 mit $a_0c_0b_0$, nehmen a_0 zum Anfangspunct des Coordinatensystems, die Linie $a_0c_0b_0$ zur x-Axe, und die durch a_0 gehende Horizontalebene zur yz-Ebene. Und dementsprechend mag fortan die Coordinate $\mathfrak{x}$ des Mittelpunctes c der Fläche σ von dem *festen* Puncte a_0 aus gerechnet werden. Auch mag in gleicher Weise verfahren werden mit der Coordinate $\mathfrak{x}_0$ des Mittelpunctes c_0 der Fläche σ_0. Dieses $\mathfrak{x}_0$ ist offenbar eine Constante, nämlich gleich dem Radius R_0 der Kugelfläche σ_0.



Nach (49.) hängt das in (65.) enthaltene F lediglich von E ab, wo E die Centraldistanz (cc_0) vorstellt. Und zwar sind die Werthe von

$$(66.)\quad F = F(E) \quad \textit{und} \quad \frac{dF}{dE} = F'(E) \ \textit{stets positiv;}$$

vergl. (57.)

Die Centraldistanz E ist je nach Umständen bald $= \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$, bald $= \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}$. Und zwar wird

$$(67.a)\quad E = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \quad \text{mithin} \quad \frac{dE}{d\mathfrak{x}} = +1,$$

falls c *oberhalb* c_0 sich befindet, wie z. B. in beistehender Figur. Hingegen wird

(67.b.) $$E = \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}, \quad \text{mithin} \quad \frac{dE}{d\mathfrak{x}} = -1$$

sein, sobald c *unterhalb* c_0 liegt. Demgemäss ergiebt sich:

(68. a.) $$\frac{dF}{d\mathfrak{x}} = \frac{dF}{dE}(+1), \text{ falls } c \textit{ oberhalb } c_0 \text{ liegt;}$$

hingegen

(68. b) $$\frac{dF}{d\mathfrak{x}} = \frac{dF}{dE}(-1), \text{ falls } c \textit{ unterhalb } c_0 \text{ liegt.}$$

Differenzirt man die Formel (65.) nach der Zeit, so erhält man:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \left[\frac{dF}{d\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^3 + 2F\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right];$$

und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf (68.a, b):

(69.) $$\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^{-1}\frac{dT}{dt} = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \left[\pm\frac{dF}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2F\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right],$$

wo von den beiden Zeichen $\pm$ das *obere* oder *untere* gilt, jenachdem c *oberhalb* oder *unterhalb* c_0 liegt. Substituirt man den Werth (69.) in (64.), so ergiebt sich für die gesuchte Kraft X^p der Werth:

(70.) $$X^p = -X^j + \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \left[\mp\frac{dF}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - 2F\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right],$$

wo wiederum von den beiden Zeichen $\mp$ das *obere* zu wählen ist, falls c *oberhalb* c_0 liegt, u. s. w. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Es sei c_0 das Centrum, und $a_0c_0b_0$ der von Unten nach Oben laufende vertikale Durchmesser einer f e s t a u f g e s t e l l t e n Kugelfläche vom Radius R_0. Innerhalb dieser Fläche befindet sich eine incompressible Flüssigkeit. Und im Innern der Flüssigkeit befinde sich eine Kugel vom Radius R, deren Centrum c längs des festen Durchmessers $a_0c_0b_0$ nach Belieben hingleiten kann.

Auf dieses materielle System mögen von A u s s e n her gegebene Kräfte einwirken; und zwar sei die Summe der x-Componenten der die Kugel sollicitirenden äussern Kräfte mit X, andererseits das Potential der die Flüssigkeit sollicitirenden äussern Kräfte mit $V = V(x, y, z)$ bezeichnet. Dabei mag als x-Axe der vertikale Durchmesser $a_0c_0b_0$, und als yz-Ebene etwa die Tangentialebene der festen Kugelfläche in ihrem tiefsten Puncte a_0 gedacht werden; sodass also dieser Punct a_0 den Anfangspunct des Coordinatensystems repräsentirt. (Vgl. die vorhergehende Figur.)

Alsdann ergiebt sich für die Bewegung der Kugel die Differentialgleichung:

(71.) $$M\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = X + X^p,$$

wo M die Masse der Kugel, und $\mathfrak{x}$ den Abstand ihres Mittelpuncts c vom Anfangspunct a_0 bezeichnet. Dabei hat das X die schon genannte Bedeutung, während X^p die x-Componente derjenigen Wirkung vorstellt, welche auf die Kugel ausgeübt wird durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit.

Diese Kraft X^p besitzt, falls man den Centralabstand (cc_0) seinem absoluten Betrage nach mit E bezeichnet, folgenden Werth:

$$X^p = -X^j \mp \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \frac{dF}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - \frac{2\pi\varrho}{3} R^3 F \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}, \tag{72.}$$

wo in jedem Augenblicke von den beiden Zeichen $\mp$ das obere oder untere gilt, je nachdem der Punct c augenblicklich oberhalb oder unterhalb c_0 liegt. Hier repräsentirt ϱ die constante Dichtigkeit der incompressiblen Flüssigkeit, ferner F eine gewisse, lediglich von E abhangende Function [vgl. (49.)]. *Und endlich repräsentirt X^j die dem Princip des Archimedes entsprechende Kraft, nämlich die x-Componente derjenigen Wirkung, welche die durch das Potential $V = V(x, y, z)$ definirten äussern Kräfte auf die Kugel ausüben würden, falls die Materie der Kugel identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit.*

Die Kraft X^p besteht nach (72.) aus *drei* Theilen. Der *erste* Theil ist $= -X^j$, der *zweite* proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit der Kugel, und der *dritte* proportional mit ihrer Beschleunigung. Der *erste* Theil ist bereits hinreichend besprochen; er entspricht dem *Princip des Archimedes.*

Was den *zweiten* Theil

$$\mp \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \frac{dF}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 \tag{73.}$$

betrifft, so wollen wir, zur augenblicklichen Fixirung der Vorstellung annehmen, c liege (wie in beistehender Figur) *oberhalb* c_0; sodass also im vorstehenden Ausdruck (73.) das *obere* Zeichen zu nehmen ist. Zugleich wollen wir uns daran erinnern, das $\frac{dF}{dE}$ *stets positiv* ist. Alsdann erkennen wir sofort, dass dieser *zweite* Theil (73.) eine der Richtung der x-Axe entgegengesetzte Kraft repräsentirt, also eine Kraft, durch welche das Centrum c der beweglichen Kugel *gegen das feste Centrum c_0 hingetrieben wird.* Zu diesem selben Resultat gelangen wir, wie leicht zu übersehen, auch in

dem andern Falle, dass c *unterhalb* c_0 liegt. *Mag man also die beweg-liche Kugel in dieser oder jener Lage betrachten, stets wird der zweite Theil der Kraft* X^p (72.) *von solcher Beschaffenheit sein, als fände zwischen den Mittelpuncten der beiden Kugelflächen eine gegenseitige Anziehung statt. Oder etwas anders ausgedrückt: Jener zweite Theil wird stets von solcher Beschaffenheit sein, als würde die bewegliche Kugel abgestossen von dem ihr jedesmal zunächst gelegenen Theil der festen Kugelfläche.*

Was ferner den *dritten* Theil:

$$(74.) \qquad -\frac{2\pi\varrho}{3} R^3 F \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$$

betrifft, so wird dieser offenbar, weil F *positiv* ist, jederzeit von *entgegengesetztem Vorzeichen* sein mit $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$. *Dieser dritte Theil von* X^p (72.) *ist somit als eine Kraft zu bezeichnen, welche der augenblicklichen Beschleunigung der Kugel jederzeit entgegen arbeitet.*

§ 14.

Ueber eine sich anschliessende Aufgabe.

Die zunächst sich darbietende Aufgabe würde eine gewisse Erweiterung der soeben behandelten sein, nämlich den Fall betreffen, dass die Kugelflächen, deren Radien und Centra mit R, c und R_0, c_0 bezeichnet wurden, *beide* beweglich sind, der Art, dass jene Centra c und c_0 längs der festen x-Axe nach Belieben fortschreiten können. Mehr Interesse dürfte aber diese Aufgabe in *dem* Falle darbieten, wenn jene beiden Kugelflächen nicht ineinander geschachtelt sind, sondern die eine *ausserhalb* der andern sich befindet; wobei alsdann die Flüssigkeit den ganzen unendlichen Aussenraum der beiden Kugelflächen einnehmen soll. Und diesen letztern Fall wollen wir in der That im folgenden Abschnitt in Betracht ziehen.

Ueber die Bewegung zweier Kugeln im Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, die nach Aussen überall ins Unendliche reicht.

§ 1.

Genauere Formulirung der Aufgabe.

Die incompressible Flüssigkeit sei umschlossen von einer *fest aufgestellten* Kugelfläche σ_∞, deren Centrum irgendwo im Endlichen liegt, und deren Radius unendlich gross ist. Innerhalb dieser Flüssigkeit mögen sich zwei Kugeln (etwa zwei Metallkugeln) σ und σ_0 befinden, deren Mittelpuncte c und c_0 auf der *festen* x-Axe liegen, und längs derselben nach Belieben fortgleiten können.

Auf dieses materielle System mögen *von Aussen* her gegebene Kräfte einwirken. Und zwar sei die Summe der x-Componenten der die *Kugel* σ sollicitirendan äussern Kräfte bezeichnet mit X, die analoge Bedeutung habe ferner X_0 für die *Kugel* σ_0; andererseits sei das Potential der die *Flüssigkeit* sollicitirenden äussern Kräfte bezeichnet mit $V = V(x, y, z)$. Ueberdiess sei gegeben der *Anfangszustand* des ganzen Systems, und zwar der der Flüssigkeit als ein *wirbelfreier*. Unter so bewandten Umständen soll nun die weitere Bewegung des Systems (der beiden Kugeln und der Flüssigkeit) näher untersucht werden.

Bemerkung. — Der von der Flüssigkeit occupirte Raum $\mathfrak{R}$ ist gegenwärtig begrenzt von der äussern Fläche σ_∞, und den beiden innern Flächen σ und σ_0. Auch erkennt man leicht, dass dieser Raum $\mathfrak{R}$ ein *einfach zusammenhängender* ist (vgl. p. 21). Und demgemäss wird es, was die Angabe des Anfangszustandes des Systems betrifft, ausreichend sein, den Anfangszustand der beiden *Kugeln* festzusetzen. Denn hiedurch wird alsdann der Anfangszustand der *Flüssigkeit* schon mitbestimmt sein (vgl. die Bemerkung auf p. 77). Um nun aber endlich den Anfangszustand der beiden *Kugeln* festzusetzen, wird es ausreichend sein, die Anfangswerthe derjenigen Geschwindigkeiten festzusetzen, mit welcher die Mittelpuncte c und c_0 dieser Kugeln längs der x-Axe fortschreiten. Denn wir wollen der Bequemlichkeit willen voraussetzen, dass die Kugeln eine *bloss fortschreitende* Bewegung annehmen dürfen, dass sie also beweglich sind längs eines der x-Axe parallelen *festen Geleises*. (Vgl. übrigens die Bemerkung p. 142.)

Um die Vorstellung zu fixiren sei die feste x-Axe *vertikal von Unten nach Oben* fortlaufend, und die längs dieser Axe, von einer *absolut festen Marke* aus, gerechneten Coordinaten der Puncte c und c_0 seien bezeichnet mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$. Sind M und M_0 die Massen der beiden Kugeln, so ergeben sich für die Bewegung dieser Kugeln die Differentialgleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} M \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= X + X^p, \\ M_0 \frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} &= X_0 + X_0^p, \end{aligned}$$

wo X und X_0 die schon genannten Bedeutungen haben, während X^p und X_0^p die x-Componenten derjenigen Wirkungen vorstellen, welche auf die beiden Kugeln ausgeübt werden durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit. *Unsere Hauptaufgabe besteht nun in der Berechnung dieser Kräfte X^p und X_0^p;* und zu diesem Zwecke haben wir der Reihe nach zuerst das *Geschwindigkeitspotential* Φ der Flüssigkeit, sodann die *lebendige Kraft* T derselben analytisch darzustellen, und endlich aus T, mittelst des *Hamilton'schen Princips*, die Werthe jener Kräfte X^p und X_0^p abzuleiten.

§ 2.

Allgemeine Disposition zur Lösung der Aufgabe.

Da der von der Flüssigkeit erfüllte Raum $\mathfrak{R}$ ein *einfach* zusammenhängender ist, so ergeben sich, ähnlich wie bei der früheren Aufgabe, für das Geschwindigkeitspotential Φ folgende Bedingungen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \Phi,\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\ \textit{stetig}, \text{ und } \Delta\Phi = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R}; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}\cos(\mathsf{N}, x), \text{ auf der Fläche } \sigma; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = \dfrac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\cos(\mathsf{N}, x), \text{ auf } \sigma_0; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \mathsf{N}} = 0, \text{ auf } \sigma_\infty; \text{ [vgl. (10.) und (11. a, b) p. 116].} \end{cases}$$

Dabei repräsentirt N, ebenso wie früher, stets die der Flüssigkeit *abgewendete* Normale. Um das diesen Bedingungen (2.) entsprechende Φ wirklich zu bestimmen, setzen wir:

$$(3.)\qquad \Phi = \Psi \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \Psi_0 \frac{d\mathfrak{x}_0}{dt},$$

wo alsdann Ψ und Ψ_0 folgenden Bedingungen zu unterwerfen sind:

$$(4.)\begin{cases} \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z} \text{ stetig,} \\ \text{und } \Delta\Psi = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R}; \\ \frac{\partial\Psi}{\partial N} = \cos(N, x) \text{ auf } \sigma; \\ \frac{\partial\Psi}{\partial N} = 0, \text{ auf } \sigma_0; \\ \frac{\partial\Psi}{\partial N} = 0, \text{ auf } \sigma_\infty; \end{cases} \qquad (5.)\begin{cases} \Psi_0, \frac{\partial\Psi_0}{\partial x}, \frac{\partial\Psi_0}{\partial y}, \frac{\partial\Psi_0}{\partial z} \text{ stetig,} \\ \text{und } \Delta\Psi_0 = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R}; \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial N} = 0, \text{ auf } \sigma; \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial N} = \cos(N, x), \text{ auf } \sigma_0; \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial N} = 0, \text{ auf } \sigma_\infty. \end{cases}$$

Denkt man sich in solcher Weise die Functionen Ψ und Ψ_0, also nach (3.) auch die Function Φ wirklich berechnet, so ergiebt sich alsdann die *lebendige Kraft T der Flüssigkeit* mittelst der Formel:

$$(6.)\qquad T = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi, \Phi)\, dx\,dy\,dz, \qquad \text{[vgl. (2.) p. 44]},$$

wo das Symbol (Φ, Φ) den früher [(β.) p. 41] festgesetzten Sinn hat. Zufolge (3.) ist daher:

$$(\Phi, \Phi) = (\Psi, \Psi)\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2(\Psi, \Psi_0)\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + (\Psi_0, \Psi_0)\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2;$$

und demgemäss folgt aus (6.):

$$(7.)\qquad T = Z\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + 2H\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + Z_0\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 = Z\mathfrak{x}'^2 + 2H\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0' + Z_0\mathfrak{x}_0'^2,$$

wo Z, Z_0 und H die Werthe haben:

$$Z = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Psi, \Psi)\, dx\,dy\,dz = \frac{\varrho}{2}\iint_{\mathfrak{R}} \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial N}\, d\sigma, \qquad \text{[vgl. (γ.) p. 41]},$$

$$Z_0 = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Psi_0, \Psi_0)\, dx\,dy\,dz = \frac{\varrho}{2}\iint_{\mathfrak{R}} \Psi_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial N}\, d\sigma,$$

$$H = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Psi, \Psi_0)\, dx\,dy\,dz = \frac{\varrho}{2}\iint_{\mathfrak{R}} \Psi_0\frac{\partial\Psi}{\partial N}\, d\sigma = \frac{\varrho}{2}\iint_{\mathfrak{R}} \Psi\frac{\partial\Psi_0}{\partial N}\, d\sigma;$$

hier sind, wie der Index $\mathfrak{R}$ andeutet, die dreifachen Integrale über alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ des Raumes $\mathfrak{R}$, andererseits die Doppel-Integrale über sämmtliche Oberflächenelemente dieses Raumes, also über die Elemente *aller drei Flächen* σ, σ_0, σ_∞ auszudehnen. Diese Werthe von Z, Z_0, H reduciren sich mittelst der Formeln (4.), (5.) auf folgende Ausdrücke:

$$Z = \frac{\varrho}{2}\iint \Psi\cos(N, x)\, d\sigma, \text{ (ausgedehnt über die \textit{eine} Fläche } \sigma),$$

$$Z_0 = \frac{\varrho}{2}\iint \Psi_0\cos(N, x)\, d\sigma_0, \text{ (ausgedehnt \textit{nur} über } \sigma_0),$$

$$H = \frac{\varrho}{2}\iint \Psi_0\cos(N, x)\, d\sigma, \text{ (ausgedehnt \textit{nur} über } \sigma),$$

oder auch: $H = \frac{\varrho}{2}\iint \Psi\cos(N, x)\, d\sigma_0$, (ausgedehnt *nur* über σ_0).

Die der Flüssigkeit *abgewendeten* Normalen der Kugelflächen σ und σ_0 sind aber *entgegengesetzt* den *Radien* R und R_0 dieser beiden Flächen. Und demgemäss können die Formeln auch so geschrieben werden:

$$\mathsf{Z} = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi \cos(R, x)d\sigma,$$

$$(8.)\quad \mathsf{Z}_0 = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi_0 \cos(R_0, x)d\sigma_0,$$

$$\mathsf{H} = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi_0 \cos(R, x)d\sigma = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi \cos(R_0, x)d\sigma_0.$$

Nun ist die Lage der beiden Kugeln σ und σ_0 in jedem Augenblick vollständig bestimmt durch Angabe der Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ ihrer Mittelpuncte c und c_0. Somit folgt aus (4.), (5.), dass durch Angabe dieser Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$ auch die *augenblickliche Beschaffenheit* der Functionen Ψ, Ψ_0 vollständig bestimmt ist. Und Gleiches gilt daher nach (8.) auch von den *augenblicklichen Werthen* der Z, Z_0, H. Diese drei Grössen sind also lediglich abhängig von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$(9.)\quad \mathsf{Z} = \mathsf{Z}(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0), \qquad \mathsf{Z}_0 = \mathsf{Z}_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0), \qquad \mathsf{H} = \mathsf{H}(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0).$$

Bemerkung. — Vergleicht man den Ausdruck der lebendigen Kraft T (7.) mit der betreffenden *allgemeinen* Formel [(3.) p. 45], so bemerkt man, dass im gegenwärtigen Fall die dort mit Θ_0 bezeichnete Grösse *verschwindet*. Und dies steht in vollem Einklang mit dem Zusatz p. 64.

Denkt man sich nun den beiden Kugeln σ und σ_0, oder vielmehr ihren Mittelpuncten c und c_0 irgend welche virtuelle Verrückungen $\delta\mathfrak{x}$ und $\delta\mathfrak{x}_0$ zuertheilt, und bezeichnet die hiebei von der Flüssigkeit (vermöge ihres Druckes) auf die beiden Kugeln ausgeübte virtuelle Arbeit mit δL, so ist offenbar:

$$(10.)\quad \delta L = X^p\delta\mathfrak{x} + X_0^p\delta\mathfrak{x}_0,$$

wo X^p und X_0^p die schon bei (1.) besprochenen Bedeutungen haben*). Andererseits aber lässt sich diese virtuelle Arbeit δL auch darstellen mittelst des früher besprochenen *Hamilton'schen Princips*. Man findet alsdann, weil der von der Flüssigkeit erfüllte Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend ist**), für δL den Ausdruck:

$$(11.)\quad \delta L = \left(\frac{\partial(T-W)}{\partial\mathfrak{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\mathfrak{x}'}\right)\delta\mathfrak{x} + \left(\frac{\partial(T-W)}{\partial\mathfrak{x}_0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\mathfrak{x}_0'}\right)\delta\mathfrak{x}_0,$$

*) Man vgl. hinsichtlich dieser *virtuellen* Arbeit δL das darüber zu Ende der p. 11 Bemerkte.

**) Vgl. die Bemerkung p. 194.

[vgl. (21.) p. 54]. Dabei bezeichnet W das *Gesammtpotential*, welches auf die Flüssigkeit ausgeübt wird von den gegebenen, durch das Potential V definirten *äussern Kräften*. Es ist mithin:

(12.) $$W = \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} V dx dy dz, \qquad \text{[vgl. (20. a) p. 13]}.$$

Und hieraus folgt, dass der Werth dieses Gesammtpotentiales W lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage der beiden Kugeln σ und σ_0, oder mit andern Worten, dass derselbe lediglich eine Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ ist; was angedeutet sein mag durch die Formel:

(13.) $$W = W(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0).$$

Durch Vergleichung der Formeln (10.) und (11.) ergiebt sich nun sofort:

(14.) $$\begin{aligned} X^p &= \frac{\partial(T - W)}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}'}, \\ X_0^p &= \frac{\partial(T - W)}{\partial \mathfrak{x}_0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}_0'}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Ableitungen von W besitzen eine einfache physikalische Bedeutung. Wir können nämlich das Integral (12.) auch so schreiben:

(α.) $$W = \varrho \iiint_{\sigma_\infty} V dx dy dz - \varrho \iiint_{\sigma} V dx dy dz - \varrho \iiint_{\sigma_0} V dx dy dz.$$

wo die Indices andeuten sollen, dass das erste Integral über den *ganzen Innenraum* der Kugelfläche σ_∞, ebenso das zweite über den Innenraum der Kugelfläche σ, und das dritte über den von σ_0 auszudehnen ist. Da das gegebene Potential $V = V(x, y, z)$ nur von den Coordinaten (nicht aber von der Zeit) abhängen soll, so ist das *erste* dieser Integrale eine Constante, etwa $= C$. Bezeichnet man die beiden andern mit w und w_0, setzt man also:

(β.) $$\varrho \iiint_{\sigma_\infty} V dx dy dz = C,$$

(γ.) $$\varrho \iiint_{\sigma} V dx dy dz = w,$$

(δ.) $$\varrho \iiint_{\sigma_0} V dx dy dz = w_0,$$

so ergiebt sich:

(ε.) $$W = C - w - w_0,$$

wo W von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$ abhängt [vgl. (13.)]; während offenbar w nur von $\mathfrak{x}$ und w_0 nur von $\mathfrak{x}_0$ dependirt. Demgemäss folgt aus (ε.):

(ζ.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}} = -\dfrac{\partial w}{\partial \mathfrak{x}}, \quad \text{und} \\ \dfrac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}_0} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial \mathfrak{x}_0}. \end{cases}$$

Die Formel (γ.) zeigt sofort, dass w dasjenige Potential repräsentirt, welches die durch V definirten äussern Kräfte auf die Kugel σ ausüben *würden*, falls die Materie der Kugel identisch wäre mit der der gegebenen Flüssigkeit. Und demgemäss repräsentirt also z. B. $-\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{x}}$ die x-Componente derjenigen Wirkung, welche jene durch V definirten äussern Kräfte auf die Kugel σ unter der eben genannten Voraussetzung ausüben *würden*. Bezeichnet man also diese x-Componente kurzweg mit X^j, so ist:

$$(\eta.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}} = -\dfrac{\partial w}{\partial \mathfrak{x}} = X^j, \text{ und ebenso bei analoger Bezeichnungsweise:} \\ \dfrac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}_0} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial \mathfrak{x}_0} = X_0^j. \end{cases}$$

Die Formeln (14.) gewinnen daher folgende Gestalt:

$$(15.) \quad \begin{aligned} X^p &= -X^j + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}'}, \\ X_0^p &= -X_0^j + \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}_0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}_0'}. \end{aligned}$$

Doch sind dieselben noch einer weitern Vereinfachung fähig. Zu diesem Zweck sei von Neuem daran erinnert, dass die in der lebendigen Kraft:

$$(16.) \qquad T = \mathsf{Z}\mathfrak{x}'^2 + 2\mathsf{H}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0' + \mathsf{Z}_0\mathfrak{x}_0'^2, \qquad \text{[vgl. (7.)]},$$

enthaltenen Coefficienten Z, Z_0 und H nur Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$ sind [vgl. (9.)], dass also diese Coefficienten nur abhängen von der *augenblicklichen relativen Lage der drei Flächen σ, σ_0, σ_∞ zu einander*. Nun sind aber sämmtliche Puncte der Kugelfläche σ_∞ in unendlicher Ferne gelegen. Es bleibt daher z. B. die relative Lage der Kugel σ zur Fläche σ_∞ stets *ein und dieselbe*, welche Bewegung jene Kugel auch annehmen mag. Gleiches gilt von der Kugel σ_0 hinsichtlich ihrer Lage zu σ_∞. Und demgemäss werden die genannten Coefficienten Z, Z_0 und H in Wirklichkeit nur abhängen von *der relativen Lage der beiden Kugeln σ und σ_0 zu einander*. Mit andern Worten: Jene Coefficienten werden in Wirklichkeit nicht von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$, sondern nur von dem *einen* Argument $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)$ abhängen. — Um die Vorstellung zu fixiren, mag die Kugel σ *oberhalb* der Kugel σ_0, mithin $\mathfrak{x} > \mathfrak{x}_0$ gedacht, und der Central-Abstand (cc_0) der beiden Kugeln mit E bezeichnet werden; so dass also

$$(17.) \qquad E = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$$

ist. Alsdann sind also Z, Z_0 und H lediglich Functionen von E, was angedeutet sein mag durch die Formeln:

(18.) $Z = Z(E), \qquad Z_0 = Z_0(E), \qquad H = H(E).$

Demgemäss kann man in (15.) statt der Differentiationen nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die Differentiation nach E eintreten lassen, und erhält alsdann:

$$(19.) \quad \begin{aligned} X^p &= -X^j + \frac{\partial T}{\partial E} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}'}, \\ X_0^p &= -X_0^j - \frac{\partial T}{\partial E} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}_0'}. \end{aligned}$$

x, $c(\mathfrak{x})$, E, $c_0(\mathfrak{x}_0)$

Substituirt man aber hier für T seinen Werth (16.), und beachtet man dabei, dass Z, Z_0, H lediglich von E abhängen, und dass $\frac{dE}{dt} = \mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0'$ ist, so gelangt man nach einfachen Reductionen zu den Formeln:

$$(20.) \quad \begin{aligned} X^p &= -X^j - \frac{dZ}{dE}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0')^2 + \frac{d(Z + 2H + Z_0)}{dE}\mathfrak{x}_0'^2 - 2(Z\mathfrak{x}'' + H\mathfrak{x}_0''), \\ X_0^p &= -X_0^j + \frac{dZ_0}{dE}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0')^2 - \frac{d(Z + 2H + Z_0)}{dE}\mathfrak{x}'^2 - 2(Z_0\mathfrak{x}_0'' + H\mathfrak{x}''); \end{aligned}$$

woraus z. B. durch Addition folgt:

$$(21.) \quad X^p + X_0^p = -(X^j + X_0^j) - \frac{d(Z - Z_0)}{dE}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0')^2 - \frac{d(Z + 2H + Z_0)}{dE}(\mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{x}_0'^2)$$
$$- 2\left[(Z + H)\mathfrak{x}'' + (Z_0 + H)\mathfrak{x}_0''\right].$$

Die erste der Formeln (20.) kann zur augenblicklichen Abkürzung etwa so geschrieben werden:

$$(22.) \quad X^p = -X^j + \alpha(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0')^2 + \beta\mathfrak{x}_0'^2 + \gamma\mathfrak{x}'' + \delta\mathfrak{x}_0''.$$

Demgemäss ist also die x-Componente X^p derjenigen Wirkung, welche auf die Kugel σ ausgeübt wird durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit wesentlich verschieden, je nachdem von den beiden Kugeln σ und σ_0, *nur* σ, oder *nur* σ_0, oder aber *gleichzeitig* σ *und* σ_0 in Bewegung begriffen sind. In der That wird jene Kraft X^p (22.) in den genannten drei Fällen der Reihe nach folgende Werthe haben:

(22. a) $X^p = -X^j + \alpha\mathfrak{x}'^2 + \gamma\mathfrak{x}''$,

(22. b) $X^p = -X^j + (\alpha + \beta)\mathfrak{x}_0'^2 + \delta\mathfrak{x}_0''$,

(22. c) $X^p = -X^j + \alpha\mathfrak{x}'^2 - 2\alpha\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0' + (\alpha + \beta)\mathfrak{x}_0'^2 + \gamma\mathfrak{x}'' + \delta\mathfrak{x}_0''$.

Auch ergeben sich, wie man sieht, die von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhängenden Glieder im dritten Fall (22. c) *nicht* durch unmittelbare Superposition aus denen in den beiden ersten Fällen (22. a, b).

Bemerkungen. — Die z. B. in (22.) enthaltenen X^j und X_0^j kann man bezeichnen als *die dem Princip des Archimedes entsprechenden Kräfte*. In der That repräsentiren nämlich X^j und X_0^j, wie aus unsern Betrachtungen sich ergeben hat, die x-Componenten derjenigen Wirkungen, welche die durch das Potential V definirten äusseren Kräfte auf die beiden Kugeln σ und σ_0 ausüben *würden*, falls die Materien dieser Kugeln identisch wären mit der Materie der gegebenen incompressiblen Flüssigkeit.

Denkt man sich die beiden Kugeln σ und σ_0 mit einander verbunden durch eine starre Linie, mithin beide Kugeln mit einander vereinigt zu einem *einzigen* starren Körper, so wird $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_0'$ und $\mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}_0''$; so dass in diesem Fall die Formel (21.) die Gestalt erhält:

$$(\alpha). \qquad X^p + X_0^p = -(X^j + X_0^j) - 2(\mathsf{Z} + \mathsf{Z}_0 + 2\mathsf{H})\mathfrak{x}'';$$

während gleichzeitig die lebendige Kraft T der Flüssigkeit (16.) den Werth annimmt:

$$(\beta.) \qquad T = (\mathsf{Z} + \mathsf{Z}_0 + 2\mathsf{H})\mathfrak{x}'^2.$$

Man übersieht leicht, dass in diesem Falle, wo es sich nur um die Bewegung eines *einzigen* starren Körpers handelt, die Formel (α.) auf Grund des Ausdruckes (β.) in bequemer Weise sich ableiten lässt mittelst der früher (p. 77—79) exponirten Methode.

Um die Kräfte X^p, X_0^p (20.) wirklich zu berechnen, haben wir die dortigen, nur von E abhängenden Coefficienten Z, Z_0, H ihrem analytischen Ausdruck nach zu bestimmen. Zu diesem Zwecke aber müssen der Reihe nach zuerst das Geschwindigkeitspotential Φ der Flüssigkeit, und sodann ihre lebendige Kraft T analytisch bestimmt werden. Dabei wird es angemessen sein, wieder von den dipolaren Coordinaten Gebrauch zu machen.

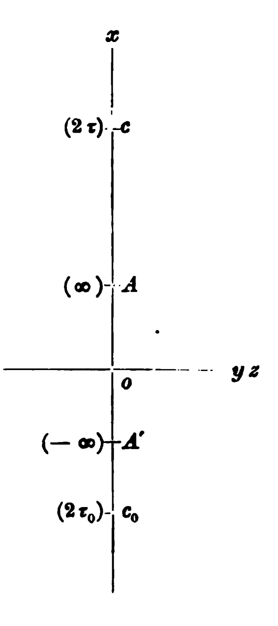
§ 3.

Einführung der dipolaren Coordinaten.

Wir betrachten das gegebene materielle System in irgend einem Augenblick seiner noch unbekannten Bewegung, und führen ein dipolares Coordinatensystem von solcher Beschaffenheit ein, dass die beiden Kugelflächen σ und σ_0 in ihren augenblicklichen Lagen nichts Anderes sind als zwei Kugelflächen dieses dipolaren Systems. Und zwar wollen wir bei der näheren Determination dieses dipolaren Systems in solcher Weise verfahren, dass seine beiden Pole $A(\vartheta = \infty)$ und $A'(\vartheta = -\infty)$ und die beiden Kugelcentren c und c_0 in *der* Weise aufeinander folgen, wie die folgende Figur es angiebt. In dieser Figur ist gleichzeitig markirt die vertikal nach Oben laufende x-Axe, und die Aequatorial-

Ebene des dipolaren Systems, letztere bezeichnet mit yz. Sind nun $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = \tau_0$ die Parameter der beiden Flächen σ und σ_0, so wird

$$(23.)\quad \begin{cases} \tau_0 < 0 < \tau, \\ \text{mithin } \delta = \tau - \tau_0 = \textit{positiv} \end{cases}$$



sein. Und gleichzeitig werden alsdann die ϑ-Coordinaten der beiden Kugelcentren c und c_0 respective $= 2\tau$ und $= 2\tau_0$ sein, wie solches angedeutet ist in der beistehenden Figur. [Vgl. den Satz p. 101.] Ueberdiess ergiebt sich aus (23.), dass

$$(24.)\quad q = e^{-\tau} \text{ und } q_0 = e^{\tau_0} \text{ und } f = qq_0 = e^{-\delta}$$

positive ächte Brüche sind*).

Sind die Radien R, R_0 der beiden Kugeln *gegeben*, und ist ferner ihre augenblickliche Centraldistanz $E = (cc_0)$, *bekannt*, so werden hiedurch die Lagen der soeben eingeführten Pole A und A', mithin auch die Werthe von τ, τ_0, δ und q, q_0, f vollständig bestimmt sein. *Demgemäss müssen also diese Grössen τ, τ_0, δ und q, q_0, f sich ausdrücken lassen als bestimmte Functionen von R, R_0, E.* Um solches zu erreichen bezeichnen wir die x-Coordinaten von c und c_0 für den Augenblick mit x und x_0, und erhalten dann z. B.

$$E = x - x_0,$$

ferner:

$$x = a\frac{1+q^2}{1-q^2} \quad \text{und} \quad x_0 = -a\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2}, \quad [\text{vgl. } (\beta.) \text{ p. } 103],$$

wo $2a = (AA')$ ist. Somit folgt:

$$(\text{f.})\quad E = a\frac{1+q^2}{1-q^2} + a\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2}.$$

Gleichzeitig ergeben sich die Formeln:

$$(\text{g.})\quad a = R\frac{1-q^2}{2q}, \quad \text{und} \quad a = R_0\frac{1-q_0^2}{2q_0}, \quad [\text{vgl. (k.) p. } 138.$$

---

*) Es mag bemerkt sein, dass hier *absichtlich* $q_0 = e^{\tau_0}$ gesetzt ist, während bei der früheren Aufgabe eine *andere* Bezeichnungsweise gewählt, nämlich $q_0 = e^{-\tau_0}$ gesetzt wurde [vgl. (45.) p. 182].

Substituirt man diese beiden Werthe von a in (f.), den einen in *erster*, den andern in *zweiter* Stelle, so folgt:

$$E = R\frac{1+q^2}{2q} + R_0\frac{1+q_0^2}{2q_0}. \tag{25. a}$$

Ueberdiess erhält man aus den beiden Formeln (g.) durch Subtraction:

$$0 = R\frac{1-q^2}{2q} - R_0\frac{1-q_0^2}{2q_0}. \tag{25. b}$$

Durch diese beiden Gleichungen (25. a, b) *bestimmen sich aber in der That* q *und* q_0 *als Functionen von* R, R_0, E. *Und hierdurch sind alsdann schon mitbestimmt der Werth von* $f = qq_0$, *sowie auch die Werthe von* τ, τ_0, δ.

Bemerkung. — Die Formeln (25. a, b) besitzen grosse Aehnlichkeit mit den früheren Formeln (48. a, b) p. 183. In der That bemerkt man, dass durch Vertauschung von

$$R,\ q_0 \quad \text{mit} \quad -R,\ \frac{1}{q_0}$$

die einen in die andern übergehen. Dementsprechend sind die dortigen Betrachtungen (α.), (β.), ... (ϑ.) sofort auf den gegenwärtigen Fall übertragbar. Und zwar wird man, an Stelle der damaligen Formeln (ε.), (ζ.), (η.), (ϑ.) p. 184, im gegenwärtigen Fall folgende erhalten:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\log q}{dE} = -\dfrac{1}{E}\dfrac{1+q_0^2}{1-q_0^2}, \\[2ex] \dfrac{d\log q_0}{dE} = -\dfrac{1}{E}\dfrac{1+q^2}{1-q^2}, \end{cases}$$

$$(\zeta.)\quad \frac{d\log f}{dE} = -\frac{1}{E}\frac{2(1-q^2q_0^2)}{(1-q^2)(1-q_0^2)} = -\frac{1}{E}\frac{2(1-f^2)}{(1-q^2)(1-q_0^2)},$$

$$(\eta.)\quad q^2 - \left(\frac{E^2+R^2-R_0^2}{ER}\right)q + 1 = 0,$$

$$(\vartheta.)\quad q_0^2 - \left(\frac{E^2+R_0^2-R^2}{ER_0}\right)q_0 + 1 = 0.$$

Die Grössen q, q_0 sind *positive ächte Brüche*, wie in (24.) constatirt ist. Demgemäss wird q die *kleinere* der beiden Wurzeln der Gleichung (η.), und ebenso q_0 die *kleinere* der beiden Wurzeln der Gleichung (ϑ.) sein.

Geometrische Bedeutung der Grössen q und q_0. — Giebt man den beiden Gleichungen (η.) und (ϑ.) zur Abkürzung die Gestalt:

$$(\iota.)\quad q^2 - \frac{2}{\varsigma}q + 1 = 0, \quad \text{wo } \varsigma = \frac{2ER}{E^2+R^2-R_0^2},$$

$$(\varkappa.)\quad q_0^2 - \frac{2}{\varsigma_0}q_0 + 1 = 0, \quad \text{wo } \varsigma_0 = \frac{2ER_0}{E^2+R_0^2-R^2},$$

so besitzen die in solcher Weise eingeführten Grössen ς und ς_0 einfache geometrische Bedeutungen. Beschreibt man nämlich in der Figur p. 202 um den Anfangspunct o des dipolaren Systems eine durch die Pole A und A' gehende Hülfskugelfläche, deren Radius mithin $= (oA) = a$ ist, so wird diese Hülfskugelfläche die beiden gegebenen Kugelflächen (c, R) und (c_0, R_0) *senkrecht* durchschneiden, wie sich solches aus unsern früheren Betrachtungen leicht ergiebt (vgl. p. 97). Selbstverständlich soll dabei z. B. (c, R) diejenige Kugelfläche vorstellen, deren Centrum c, und deren Radius R ist. Legt man daher von o aus eine Tangente (op) an die Kugel (c, R), so erhält man ein bei p rechtwinkliges Dreieck (opc), dessen *eine* Kathete $(op) = a$ ist, während seine *andere* Kathete $(pc) = R$ ist. Bezeichnet man daher den Innenwinkel dieses Dreiecks bei o mit $\varkappa$, so ergiebt sich:

$$(\lambda.) \qquad R = a \operatorname{tg} \varkappa, \quad \text{und } (oc) = \frac{a}{\cos \varkappa},$$

wo $\varkappa$ bezeichnet werden kann als der *sphärische Radius des von o aus an die Kugel (c, R) gelegten Tangentenkegels.* In gleicher Weise erhält man andererseits:

$$(\mu.) \qquad R_0 = a \operatorname{tg} \varkappa_0 \quad \text{und } (oc_0) = \frac{a}{\cos \varkappa_0},$$

wo alsdann $\varkappa_0$ *den sphärischen Radius des von o aus an die Kugel (c_0, R_0) gelegten Tangentenkegels vorstellt.* Die Summe $(oc) + (oc_0)$ ist offenbar gleich der Centraldistanz der beiden gegebenen Kugeln, also $= E$. Demgemäss ergiebt sich aus $(\lambda.)$ und $(\mu.)$:

$$(\nu.) \qquad E = \frac{a}{\cos \varkappa} + \frac{a}{\cos \varkappa_0} = a \frac{\cos \varkappa + \cos \varkappa_0}{\cos \varkappa \cos \varkappa_0}.$$

Substituirt man jetzt in der Formel $(\iota.)$:

$$(\xi.) \qquad \varsigma = \frac{2ER}{E^2 + R^2 - R_0^2}$$

für R, R_0, E die Werthe $(\lambda.)$, $(\mu.)$, $(\nu.)$, so erhält man zuvörderst:

$$2ER = a^2 \frac{2 \sin \varkappa \cos \varkappa_0 (\cos \varkappa + \cos \varkappa_0)}{(\cos \varkappa \cos \varkappa_0)^2},$$

$$E^2 + R^2 - R_0^2 = a^2 \frac{(\cos \varkappa + \cos \varkappa_0)^2 + (\cos^2 \varkappa_0 - \cos^2 \varkappa)}{(\cos \varkappa \cos \varkappa_0)^2},$$

$$\text{d. i.} \quad = a^2 \frac{2 \cos \varkappa_0 (\cos \varkappa + \cos \varkappa_0)}{(\cos \varkappa \cos \varkappa_0)^2},$$

und folglich:

$$(\xi'.) \qquad \varsigma = \sin \varkappa,$$

wo $\varkappa$ offenbar zwischen 0^0 und 90^0 liegt. Nun ergiebt sich ferner durch Auflösung der quadratischen Gleichung (ι.):

$$(\pi.) \qquad q = \frac{1 - \sqrt{1 - \varsigma^2}}{\varsigma};$$

dass hier im Zähler das Zeichen — zu nehmen ist, unterliegt keinem Zweifel, falls man nur beachtet, dass q ein *positiver* ächter Bruch sein soll, und dass ς den in (ξ'.) genannten Werth besitzt. Substituirt man diesen Werth von ς in die Formel (π.), so folgt:

$$(\varrho.) \qquad q = \frac{1 - \cos\varkappa}{\sin\varkappa} = \operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}.$$

Analoge Formeln ergeben sich für ς_0 und q_0. Beachtet man daher, dass der Punct o definirt werden kann als derjenige Punct der Centrallinie $(cc_0) = E$, von welchem aus die Tangenten an beide Kugeln (c, R) und (c_0, R_0) *gleich lang* sind, so lautet das gefundene Resultat folgendermassen:

Versteht man unter o denjenigen Punct der Centrallinie der beiden gegebenen Kugeln, von welchem aus die Tangenten an beide Kugeln gleich lang sind, und versteht man ferner unter $\varkappa$ und $\varkappa_0$ die sphärischen Radien der von o aus an jene Kugeln gelegten Tangentenkegel, so haben die Grössen q, q_0 und die in (ι.), ($\varkappa$.) eingeführten Grössen ς, ς_0 folgende Bedeutungen:

$$(\sigma.) \qquad \begin{aligned} q &= \operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}, \qquad \varsigma = \sin\varkappa, \\ q_0 &= \operatorname{tg}\frac{\varkappa_0}{2}, \qquad \varsigma_0 = \sin\varkappa_0, \end{aligned}$$

Diese Formeln geben für jedwede relative Lage der beiden Kugeln sofort eine anschauliche Vorstellung über die Werthe von q, q_0 und ς, ς_0.

Reihenentwicklungen. — Will man, wenn R, R_0, E gegeben sind, die Werthe von ς, q und ς_0, q_0 *berechnen*, so kann man dabei von folgenden Reihenentwicklungen Gebrauch machen:

$$(\varphi.) \qquad \varsigma = \frac{2R}{E}\left[1 + \left(\frac{R_0^2 - R^2}{E^2}\right)^1 + \left(\frac{R_0^2 - R^2}{E^2}\right)^2 + \cdots\right],$$

$$(\psi.) \qquad q = \frac{1}{2}\left[\varsigma + \frac{1}{4}\varsigma^3 + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\varsigma^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\varsigma^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\varsigma^9 + \cdots\right],$$

von denen die eine aus (ξ.), die andere aus (π.) sich unmittelbar ergiebt. Endlich erhält man aus den Formeln (φ.), (ψ.) durch Vertauschung von R, ς, q mit R_0, ς_0, q_0 die analogen Reihenentwicklungen für ς_0 und q_0.

Beiläufige Aufgabe. — Ein Blick auf die Formeln (σ.) zeigt, dass q, q_0, mithin auch $f = qq_0$ zu *Eins* werden, sobald die beiden Kugeln einander *berühren*, dass mithin für den Augenblick der Berührung

(a.) $$(1 - q^2) : (1 - q_0^2) : (1 - f^2) = 0 : 0 : 0$$

wird. Es sollen die *wahren* Werthe dieser Verhältnisse untersucht werden.

Dividirt man die beiden Formeln (g.) p. 202 durch einander, so erhält man, und zwar für einen *beliebigen* Werth der Centraldistanz E:

(b.) $$\frac{1 - q_0^2}{1 - q^2} = \frac{q_0}{q} \frac{R}{R_0};$$

und diese Formel wird also z. B. auch in Kraft bleiben für den Specialfall $E = R + R_0$, d. i. für den Fall der *Berührung*. — Ferner ist identisch:

$$\frac{1 - f^2}{1 - q^2} = \frac{1 - q^2 q_0^2}{1 - q^2} = \frac{(1 - q^2)(1 + q_0^2) + (1 + q^2)(1 - q_0^2)}{2(1 - q^2)},$$

also mit Rücksicht auf (b.):

(c.) $$\frac{1 - f^2}{1 - q^2} = \frac{1 + q_0^2}{2} + \frac{1 + q^2}{2} \frac{q_0}{q} \frac{R}{R_0},$$

(d.) $$\text{mithin} \quad = 1 + \frac{R}{R_0} = \frac{R + R_0}{R_0}$$

für den Fall der *Berührung*; denn im Augenblick der Berührung werden ja q und q_0 zu Eins. Wir gelangen somit, mittelst (b.) und (d.), zu dem Resultat, *dass im Augenblick der Berührung*

(e.) $$(1 - q^2) : (1 - q_0^2) : (1 - f^2) = R_0 : R : (R + R_0)$$

wird; womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Gleichzeitig erkennt man nun aus (ε.), (ζ.) p. 203, dass die Differentialquotienten

(f.) $$\frac{dq}{dE}, \quad \frac{dq_0}{dE}, \quad \frac{df}{dE}$$

im Augenblick der Berührung *unendlich gross* werden, während trotzdem die Verhältnisse dieser Quotienten zu einander bestimmte endliche Werthe behalten. In der That ergiebt sich aus jenen Formeln (ε.), (ζ.), mit Rücksicht auf den soeben erhaltenen Satz (e.), *dass im Augenblick der Berührung*

(g.) $$\frac{dq}{dE} : \frac{dq_0}{dE} : \frac{df}{dE} = R_0 : R : (R + R_0)$$

wird. Von dieser letzten Formel wird weiterhin Gebrauch zu machen sein.

§ 4.

Berechnung des Geschwindigkeitspotentials.

Das Geschwindigkeitspotential Φ besitzt den Werth

(26.) $$\Phi = \Psi \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \Psi_0 \frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}, \quad \text{[vgl. (3.) p. 195]},$$

wo z. B. Ψ den Bedingungen zu entsprechen hat:

(27.) $$\begin{cases} \Psi,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x},\ \frac{\partial \Psi}{\partial y},\ \frac{\partial \Psi}{\partial z}\ \textit{stetig},\ \text{und}\ \Delta\Psi = 0,\ \text{im Raume}\ \mathfrak{R}; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, x),\ \text{auf der Fläche}\ \sigma\ \text{oder}\ (\tau); \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathsf{N}} = 0,\ \text{auf der Fläche}\ \sigma_0\ \text{oder}\ (\tau_0); \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathsf{N}} = 0,\ \text{auf der Fläche}\ \sigma_\infty. \end{cases}$$

Was diese *vier* Bedingungen (27.) betrifft, so wird offenbar der *ersten* und ebenso auch der *vierten* Genüge geleistet werden, wenn man für Ψ irgend eine Potentialfunction des Raumes $\mathfrak{R}$ nimmt [vgl. (A.), (B.), (C.), p. 165]. Demgemäss handelt es sich also darum, eine Function Ψ zu finden, welche eine *Potentialfunction* des Raumes $\mathfrak{R}$ ist, und welche überdiess den beiden Bedingungen entspricht:

(28. a) $$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, x),\ \text{auf der Fläche}\ \sigma\ \text{oder}\ (\tau);$$

(28. b) $$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathsf{N}} = 0,\ \text{auf der Fläche}\ \sigma_0\ \text{oder}\ (\tau_0).$$

Eine diesen Anforderungen entsprechende Function Ψ kann aber sofort aufgestellt werden mittelst des früher gefundenen Theorems (p. 175). Da bei der gegenwärtigen Sachlage $\tau_0 < 0 < \tau$ ist [vgl. (23.)], mithin $\frac{\tau_0}{\tau} < 1$ (nämlich von negativem Werthe) ist, so hat man, um nach Vorschrift jenes Theorems zu verfahren, zunächst auf der x-Axe in *unendlicher Ferne* einen Punct 1 zu markiren, und sodann das System der zu 1 gehörigen Spiegelpuncte 2, 3, 4, 5, ... zu construiren, gemäss dem Schema

(29.) $$1 - (\tau) - 2 - (\tau_0) - 3 - (\tau) - 4 - (\tau_0) - 5 - \text{etc etc.}$$

Solches ausgeführt, wird alsdann die gesuchte Function Ψ, zufolge jenes Theorems, den Werth haben:

(30.) $$\Psi = a\left(\mathfrak{x}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \mathfrak{x}_3 \frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \mathfrak{x}_4 \frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - \mathfrak{x}_5 \frac{\partial T_5}{\partial \vartheta_5} + - \cdots\right).$$

Genauer würde die Function Ψ mit $\Psi(x, y, z)$ zu bezeichnen sein, wo (x, y, z) einen beliebigen Punct des Raumes $\mathfrak{R}$ repräsentirt. Und die in (30.) enthaltenen Grössen $T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$ repräsentiren alsdann die reciprocen Entfernungen dieses variablen Punctes (x, y, z) von den *festen* Puncten 2, 3, 4, 5, ...

Bemerkung. — Behufs der weiteren Betrachtungen erscheint es nothwendig, Alles, was in Betreff der geometrischen Lage und analytischen Bestimmung der festen Puncte 1, 2, 3, 4, 5, ... bekannt ist, hier zusammenzustellen. Auf Grund des Zusatzes (p. 176) wissen wir, *dass sämmtliche Puncte* 2, 3, 4, 5, ... *auf der x-Axe, und ausserhalb des Raumes* $\mathfrak{R}$, *mithin theils innerhalb der Kugel* (τ), *theils innerhalb der* Kugel (τ_0) *gelegen sind.* Da ferner 1 auf der x-Axe im *Unendlichen* liegt, mithin $\omega_1 = \vartheta_1 = 0$ ist, so ergeben sich aus jenem Zusatz die Formeln:

$$(\alpha.) \qquad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \ldots = Null,$$

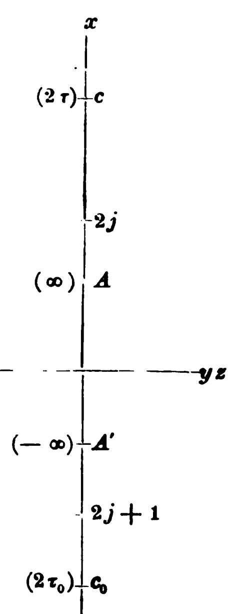
ferner die Formeln:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} \vartheta_2 &= 2\tau, & \vartheta_3 &= -2\delta, \\ \vartheta_4 &= 2\tau + 2\delta, & \vartheta_5 &= -4\delta, \\ \vartheta_6 &= 2\tau + 4\delta, & \vartheta_7 &= -6\delta, \\ \vartheta_8 &= 2\tau + 6\delta, & \vartheta_9 &= -8\delta, \\ &\text{etc. etc.} & &\text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

wo $\delta = \tau - \tau_0$ ist. Desgleichen ergiebt sich aus jenem Zusatz die Formel:

$$(\gamma.) \qquad \ldots \vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 < \tau_0 < \tau < \vartheta_2 < \vartheta_4 < \vartheta_6 \ldots.$$

In der That ist in dieser letzten Formel im gegenwärtigen Fall durchweg das Zeichen $<$ am Platze; denn zwischen den in $(\gamma.)$ auftretenden Grössen τ_0 und τ findet nach (23.) die Beziehung statt: $\tau_0 < \tau$. — Aus dieser Formel $(\gamma.)$ ersieht man sofort, dass die Puncte $2j$, d. i. 2, 4, 6, ... *innerhalb* der Kugel (τ), andererseits aber die Puncte $2j + 1$, d. i. 3, 5, 7, ... *innerhalb* der Kugel (τ_0) liegen.



Uebrigens kann man die Lage dieser Puncte innerhalb der beiden Kugeln leicht noch *genauer* angeben. Da nämlich τ und δ *positiv* sind (23.), so folgt aus den Formeln $(\beta.)$:

$$(\varepsilon.) \qquad 2\tau = \vartheta_2 < \vartheta_4 < \vartheta_6 < \cdots < \infty.$$

Nun ist aber 2τ die ϑ-Coordinate des Centrums c der Kugel (τ), und ∞ die ϑ-Coordinate des Poles A. Somit folgt aus den Formeln $(\varepsilon.)$, unter Rücksichtnahme auf $(\alpha.)$, *dass sämmtliche Puncte* $2j$, d. i. 2, 4, 6, 8, ... *zwischen* c *und* A *liegen; wie solches auch angedeutet ist in der beistehenden Figur.*

Ferner ist nach (β.), weil δ *positiv* ist: $\vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 = -2\delta$. Dieses -2δ ist aber, nach (23.), $= -2\tau + 2\tau_0$, also weil τ *positiv* ist, $< 2\tau_0$, sodass man also schreiben kann:

$$(\zeta.) \qquad -\infty < \cdots\cdot < \vartheta_7 < \vartheta_5 < \vartheta_3 = -2\delta < 2\tau_0.$$

Das $-\infty$ ist aber die ϑ-Coordinate des Poles A'; während andererseits das $2\tau_0$ die ϑ-Coordinate des Centrums c_0 der Kugel (τ_0) repräsentirt. Somit folgt aus (ζ.), unter Rücksichtnahme auf (α.), *dass alle Puncte* $2j+1$, *d. i.* 3, 5, 7, 9, ... *zwischen* A' *und* c_0 *liegen; wie solches auch angedeutet sich findet in der vorstehenden Figur.*

Wir haben hier von den beiden im Geschwindigkeitspotential Φ (26.) enthaltenen Functionen Ψ und Ψ_0 nur die *erstere* in Betracht gezogen. Für die letzte, nämlich für Ψ_0, gilt offenbar Analoges. Doch wird ein näheres Eingehen hierauf für unsere Zwecke nicht erforderlich sein.

§ 5.

Berechnung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit.

Die lebendige Kraft T der Flüssigkeit besitzt den Werth:

$$(31.) \qquad T = \mathsf{Z}\mathfrak{x}'^2 + 2\mathsf{H}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0' + \mathsf{Z}_0\mathfrak{x}_0'^2, \qquad \text{[vgl. (7.) p. 196]},$$

wo z. B. Z und H dargestellt sind durch die Formeln:

$$(32.) \qquad \mathsf{Z} = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi \cos(R, x)\, d\sigma,$$

$$(33.) \qquad \mathsf{H} = -\frac{\varrho}{2}\iint \Psi \cos(R_0, x)\, d\sigma_0. \qquad \text{[vgl. (8.) p. 197]}.$$

Auch wissen wir bereits, dass diese Coefficienten Z, Z_0, H *lediglich* abhängen können von der Centraldistanz E der beiden Kugeln. Es handelt sich nun hier um die wirkliche Bestimmung dieser Coefficienten.

Da allgemein $\xi = \frac{2a}{\sqrt{\psi}}$ ist [vgl. (25.) p. 105], so kann die Formel (30.) auch so geschrieben werden:

$$(34.) \qquad \Psi = 2a^2\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial T_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial T_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial T_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right).$$

Substituirt man aber dieses Ψ in (32.), so erhält man:

$$(35.) \qquad \mathsf{Z} = -\varrho a^2\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}}\frac{\partial U_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}}\frac{\partial U_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}}\frac{\partial U_4}{\partial \vartheta_4} - + \cdots\right),$$

wo alsdann die U's die Bedeutungen haben:

$$(36.) \qquad \begin{aligned} U_{2j} &= \iint T_{2j} \cos(R, x)\, d\sigma, \\ U_{2j+1} &= \iint T_{2j+1} \cos(R, x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Diese Formeln (35.), (36.) sind vollständig identisch mit den früheren Formeln (30.), (31.) p. 179, nur mit dem Unterschiede, dass das dortige G hier $= 1$ ist. Demgemäss erhält man für das Z, analog der damaligen Formel (38.) p. 181, folgenden Werth:

$$(37.)\qquad \mathsf{Z} = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 \left\{1 + 3(1-q^2)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{f^j}{1-q^2 f^{2j}}\right)^3\right\},$$

wo das $f = qq_0$ ist [vgl. (24.)]. — Nun muss aber, wie ein Blick auf die Formel (31.) zeigt, der Coefficient Z zu den Kugeln (τ), (τ_0) in *derselben* Beziehung stehen, in welcher Z_0 umgekehrt zu (τ_0), (τ) steht. Demgemäss wird man also dieses Z_0 aus dem Werthe (37.) einfach dadurch erhalten können, dass man

$$R,\ q,\ f = qq_0 \text{ respective mit } R_0,\ q_0,\ f = q_0 q$$

vertauscht*). Man erhält somit:

$$(38.)\qquad \mathsf{Z}_0 = \frac{\pi\varrho}{3} R_0^3 \left\{1 + 3(1-q_0^2)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{f^j}{1-q_0^2 f^{2j}}\right)^3\right\}.$$

Was ferner H betrifft, so ergiebt sich aus (33.) durch Substitution des Werthes (34.):

$$(39.)\qquad \mathsf{H} = -\varrho a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\psi_2}} \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta_2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_3}} \frac{\partial V_3}{\partial \vartheta_3} + \frac{1}{\sqrt{\psi_4}} \frac{\partial V_4}{\partial \vartheta_4} + - \cdots\right),$$

wo alsdann die V's die Bedeutungen haben:

$$(40.)\qquad \begin{aligned} V_{2j} &= \iint T_{2j} \cos(R_0, x)\, d\sigma_0, \\ V_{2j+1} &= \iint T_{2j+1} \cos(R_0, x)\, d\sigma_0. \end{aligned}$$

Bringt man auf diese beiden Integrale (40.) die Hülfssätze $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ p. 133 in Anwendung, und beachtet man dabei die in der Figur p. 208 markirte Lage der Puncte $2j$ und $2j+1$, so erhält man sofort:

$$(41.)\qquad \begin{aligned} V_{2j} &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_0}{r_{2j}}\right)^3 r_{2j} \cos(r_{2j}, x) = \frac{4\pi}{3} \frac{R_0^3}{r_{2j}^2}, \\ V_{2j+1} &= \frac{4\pi}{3} r_{2j+1} \cos(r_{2j+1}, x) \quad = \frac{4\pi}{3} r_{2j+1}; \end{aligned}$$

denn jene Integrationen (40.) erstrecken sich über die Kugelfläche σ_0 oder (τ_0). Demgemäss sind unter r_{2j} und r_{2j+1} die vom Centrum c_0 (nicht c) nach den Puncten $2j$ und $2j+1$ laufenden Linien zu ver-

---

*) Dass nämlich der Parameter q für die Kugel (τ) genau dieselbe Bedeutung hat, welche q_0 für die Kugel (τ_0) hat, unterliegt keinem Zweifel. Man kann solches erkennen entweder direct aus den Formeln (24.), oder (vielleicht noch bequemer) aus den Formeln $(\sigma.)$ p. 205.

stehen; sodass also die Winkel (r_{2j}, x) und (r_{2j+1}, x) sämmtlich $= 0$ sind. Aus (41.) folgt weiter:

$$(42.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\,\frac{\partial V_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= -\frac{8\pi}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\left(\frac{R_0}{r_{2j}}\right)^3\frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}},\\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\,\frac{\partial V_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= +\frac{4\pi}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\,\frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Nach der Figur p. 208 ist aber: $r_{2j} = x_{2j} - x_{c_0}$ und $r_{2j+1} = x_{2j+1} - x_{c_0}$, mithin z. B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= \frac{\partial x_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} = -\frac{2a}{\psi_{2j}},\\ \frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= \frac{\partial x_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} = -\frac{2a}{\psi_{2j+1}}, \end{aligned}\qquad \text{[vgl. p. 103, } (\gamma.)].$$

Somit folgt aus (42.):

$$(43.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\,\frac{\partial V_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= +\frac{16\pi a}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}}\,\frac{R_0}{r_{2j}}\right)^3,\\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\,\frac{\partial V_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= -\frac{8\pi a}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}}\right)^3. \end{aligned}$$

Nach (β.) p. 208 ist: $\vartheta_{2j} = 2\tau + (2j-2)\delta$, und $\vartheta_{2j+1} = -2j\delta$, mithin:

$$\begin{aligned} \psi_{2j} &= (e^{\tau+(j-1)\delta} - e^{-\tau-(j-1)\delta})^2,\\ \psi_{2j+1} &= (e^{j\delta} - e^{-j\delta})^2, \end{aligned}\qquad \text{[vgl. p. 103, } (\alpha.)].$$

Nimmt man von diesen Ausdrücken die positiven Quadratwurzeln, und beachtet man, dass τ, δ, j *positiv* sind [vgl. (23.)], so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{\psi_{2j}} &= e^{\tau+(j-1)\delta} - e^{-\tau-(j-1)\delta} = e^{\tau+(j-1)\delta}(1 - e^{-2\tau-(2j-2)\delta}),\\ \sqrt{\psi_{2j+1}} &= e^{j\delta} - e^{-j\delta} = e^{j\delta}(1 - e^{-2j\delta}), \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die in (24.) eingeführten Bezeichnungen:

$$(\text{a.})\qquad \begin{aligned} \sqrt{\psi_{2j}} &= \frac{1 - q^2 f^{2j-2}}{q f^{j-1}},\\ \sqrt{\psi_{2j+1}} &= \frac{1 - f^{2j}}{f^j}. \end{aligned}$$

Bringt man ferner die allgemeine Formel:

$$E = \pm\frac{2a(e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_2})}{(e^{\vartheta_1} - 1)(e^{\vartheta_2} - 1)},\qquad \text{[p. 103 } (\varepsilon.)],$$

in Anwendung auf die Entfernung r_{2j}, d. i. auf die Entfernung $(c_0, 2j)$, und beachtet man dabei, dass $\vartheta_{c_0} = 2\tau_0$ und $\vartheta_{2j} = 2\tau + (2j-2)\delta$

14*

ist, und dass überdiess die Grössen τ, δ und $(2j-2)$ **stets** ***positiv*** sind, τ_0 hingegen *negativ* ist, so erhält man:

$$r_{2j} = \frac{2a\left(e^{2\tau+(2j-2)\delta} - e^{2\tau_0}\right)}{\left(1 - e^{2\tau_0}\right)\left(e^{2\tau+(2j-2)\delta} - 1\right)},$$

oder mit Rücksicht darauf, dass $\tau - \tau_0 = \delta$ ist:

$$r_{2j} = \frac{2a\left(1 - e^{-2j\delta}\right)}{\left(1 - e^{2\tau_0}\right)\left(1 - e^{-2\tau-(2j-2)\delta}\right)},$$

oder mit Benutzung der in (24.) eingeführten Bezeichnungen:

$$\text{(b.)} \qquad r_{2j} = \frac{2a\left(1 - f^{2j}\right)}{\left(1 - q_0^2\right)\left(1 - q^2 f^{2j-2}\right)}.$$

Beachtet man nun die bereits früher notirten Formeln:

$$R = \frac{2aq}{1-q^2}, \qquad R_0 = \frac{2aq_0}{1-q_0^2}, \qquad \text{[vgl. (g.) p. 202]},$$

so erhält man sofort:

$$\text{(d.)} \qquad \frac{R_0}{r_{2j}} = \frac{q_0\left(1 - q^2 f^{2j-2}\right)}{1 - f^{2j}}.$$

Substituirt man jetzt die Werthe (a.) und (d.) in (43.), **und beachtet** dabei, dass $qq_0 = f$ ist, so folgt:

$$\text{(44.)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j}}} \frac{\partial V_{2j}}{\partial \vartheta_{2j}} &= + \frac{16\pi a}{3}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j}}\right)^3, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi_{2j+1}}} \frac{\partial V_{2j+1}}{\partial \vartheta_{2j+1}} &= - \frac{8\pi a}{3}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j}}\right)^3. \end{aligned}$$

Substituirt man schliesslich diese Werthe (44.) in die Formel (39.), so erhält man:

$$\text{(45.)} \qquad \mathsf{H} = -\varrho a^2 \frac{8\pi a}{3} \left\{ \begin{aligned} &2\left(\frac{f}{1-f^2}\right)^3 + 2\left(\frac{f^2}{1-f^4}\right)^3 + 2\left(\frac{f^3}{1-f^6}\right)^3 + \cdots \\ &+ \left(\frac{f}{1-f^2}\right)^3 + \left(\frac{f^2}{1-f^4}\right)^3 + \left(\frac{f^3}{1-f^6}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \right\},$$

wo die Glieder *erster* Zeile den Puncten $2j$, und die der ***zweiten* Zeile** den Puncten $2j+1$ entsprechen. Diese Formel (45.) **reducirt sich** aber sofort auf:

$$\text{(46.)} \qquad \mathsf{H} = -\pi\varrho(2a)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{f^j}{1-f^{2j}}\right)^3.$$

Nun ist nach (g.) p. 202:

$$\left\{ \begin{aligned} &2a = \frac{R(1-q^2)}{q}, \qquad 2a = \frac{R_0\left(1-q_0^2\right)}{q_0}, \\ &\text{mithin auch:} \quad 2a = \frac{\sqrt{RR_0}\sqrt{(1-q^2)\left(1-q_0^2\right)}}{\sqrt{f}}; \end{aligned} \right.$$

sodass man also die Formel (46.) auch so schreiben kann:

$$(47.)\qquad \mathsf{H} = -\pi\varrho\left(\frac{\sqrt{RR_0}\sqrt{(1-q^2)(1-q_0^2)}}{\sqrt{f}}\right)^3 \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j}}\right)^3.$$

Die beiden Kugeln und die Natur der betrachteten incompressiblen Flüssigkeit sind als *gegeben*, mithin die Radien R, R_0, sowie auch die Dichtigkeit ϱ der incompressiblen Flüssigkeit als *absolut unveränderliche Constanten* anzusehen. Alsdann aber sind die Grössen q, q_0 und $f = qq_0$ lediglich Functionen des Central-Abstandes E der beiden Kugeln [vgl. (25. a, b)]. Gleiches gilt daher, nach (37.), (38.) und (47.), auch von Z, Z_0 und H. Also der Satz: *Die in dem Ausdruck der lebendigen Kraft der Flüssigkeit:*

$$(48.)\qquad T = \mathsf{Z}\mathfrak{x}'^2 + 2\mathsf{H}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0' + \mathsf{Z}_0\mathfrak{x}_0'^2, \qquad \text{[vgl. (31.)]},$$

enthaltenen Coefficienten Z, Z_0 *und* H *hängen lediglich ab von der augenblicklichen Centraldistanz E der beiden Kugeln.* Uebrigens ist dies derselbe Satz, zu welchem wir schon früher [in (18.)] auf anderem Wege gelangt waren.

§ 6.

Fortsetzung. Soll der für die lebendige Kraft der Flüssigkeit erhaltene Werth der richtige sein, so muss sich zeigen lassen, dass derselbe stets positiv ist.

Mit andern Worten: Sollen die für Z, Z_0, H gefundenen Werthe die richtigen sein, so muss sich zeigen lassen, dass der mit diesem Werthe von Z, Z_0, H behaftete Ausdruck (48.) stets *positiv* ist. Um diesen Nachweis zu führen, stellen wir jene Werthe von Z, Z_0, H von Neuem hin, indem wir dabei zur Abkürzung setzen:

$$(49.)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi\varrho}{3}R^3} &= A, & \sqrt{3(1-q^2)^3} &= B,\\ \sqrt{\frac{\pi\varrho}{3}R_0^3} &= A_0, & \sqrt{3(1-q_0^2)^3} &= B_0,\end{aligned}$$

wo unter den Quadratwurzeln (wie überhaupt an *allen* Stellen des vorliegenden Werkes) die *positiven* Werthe derselben verstanden sein sollen. Wir erhalten alsdann

$$(50.)\qquad \mathsf{Z} = A^2\left\{1 + B^2\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-q^2f^{2j}}\right)^3\right\}, \qquad \text{[nach (37.)]},$$

$$(51.)\qquad \mathsf{Z}_0 = A_0^2\left\{1 + B_0^2\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-q_0^2f^{2j}}\right)^3\right\}, \qquad \text{[nach (38.)]},$$

$$(52.)\qquad \mathsf{H} = -AA_0BB_0\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j}}\right)^3, \qquad \text{[nach (47.)]}.$$

Den Ausdruck für H (52.) kann man übrigens, indem man das (dem $j=1$ entsprechende) *erste* Glied der Summe von den übrigen Gliedern absondert, auch so schreiben:

$$(52.\ a)\qquad H = -AA_0\left\{\frac{BB_0(\sqrt{f})^3}{(1-f^2)^3} + BB_0(\sqrt{f})^3\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j+2}}\right)^3\right\}.$$

Zur Erreichung unseres eigentlichen Zieles bedarf es nun einer gewissen Transformation dieser Ausdrücke für Z, Z_0, H, und zwar einer Transformation, welche sich von selber darbietet auf Grund unserer *früheren* Betrachtungen. Durch gegenseitige Vergleichung der beiden auf p. 181 notirten Formeln (40.) und (44.) ergiebt sich nämlich sofort, dass für beliebige Werthe der positiven ächten Brüche q und f stets die identische Gleichung stattfindet:

$$(\varkappa.)\qquad \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-q^2f^{2j}}\right)^3 = \left(\frac{1}{q}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(qf)^{2n+1}}{1-f^{2n+1}};$$

eine Gleichung, die z. B. für $q=f$ die Gestalt annimmt:

$$(\lambda.)\qquad \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{f^j}{1-f^{2j+2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{f}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(ff)^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}.$$

Mittelst dieser Transformationsformeln ($\varkappa$.) und (λ.) gehen die Ausdrücke (50.), (51.) und (52. a) über in:

$$(53.)\qquad Z = A^2\left\{1 + B^2\left(\frac{1}{q}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(qf)^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}\right\},$$

$$(54.)\qquad Z_0 = A_0^2\left\{1 + B_0^2\left(\frac{1}{q_0}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(q_0f)^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}\right\},$$

$$(55.)\qquad H = -AA_0\left\{\frac{BB_0(\sqrt{f})^3}{(1-f^2)^3} + BB_0\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(ff)^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}\right\}.$$

Substituirt man aber diese Werthe von Z, Z_0, H in die Formel (48.):

$$(56.)\qquad T = Z\mathfrak{x}'^2 + Z_0\mathfrak{x}_0'^2 + 2H\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0',$$

so erhält man für dieses T einen Ausdruck von der Form:

$$(57.)\qquad T = T_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} T_n,$$

dessen einzelne Glieder T_0 und $T_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sich so darstellen:

$$(58.)\qquad T_0 = y^2 + y_0^2 - 2yy_0\,\frac{BB_0(\sqrt{f})^3}{(1-f^2)^3},$$

$$(59.)\qquad T_n = \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{f^{2n+1}}{1-f^{2n+1}}\left\{y^2\,\frac{q^{2n+1}}{q^3} + y_0^2\,\frac{q_0^{2n+1}}{q_0^3} - 2yy_0\,\frac{f^{2n+1}}{(\sqrt{f})^3}\right\}.$$

Dabei sind die Buchstaben y und y_0 zur augenblicklichen Abkürzung eingeführt. Und zwar ist in (58.): $y = A\mathfrak{x}'$ und $y_0 = A_0\mathfrak{x}'_0$; andererseits in (59.): $y = AB\mathfrak{x}'$ und $y_0 = A_0B_0\mathfrak{x}'_0$.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die Glieder T_n, *einzeln* genommen, *stets positiv* sind, falls man nur beachtet, dass q, q_0 und $f = qq_0$ positive ächte Brüche vorstellen. In der That wird ein Ausdruck von der Form

$$(\alpha.) \qquad Y = y^2L + y_0^2L_0 - 2yy_0M,$$

ganz allgemein für beliebige Werthsysteme von y, y_0 *positiv sein*, falls nur die L, L_0, M den beiden Bedingungen entsprechen:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} L &= \text{pos.} \\ LL_0 - M^2 &= \text{pos.} \end{aligned}$$

Denn aus (α.) folgt:

$$LY = y^2L^2 + y_0^2LL_0 - 2yy_0LM,$$

$$\text{d. i.} \quad LY = (yL - y_0M)^2 + (LL_0 - M^2)y_0^2; \quad q.\ e.\ d.$$

Der in (59.) in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck entspricht aber diesen Bedingungen (β.). Denn es ist für denselben z. B.:

$$LL_0 - M^2 = \frac{(qq_0)^{2n+1}}{(qq_0)^3} - \frac{f^{4n+2}}{f^3}, \quad \text{also, weil } qq_0 = f \text{ ist:}$$

$$= \frac{f^{2n+1}(1 - f^{2n+1})}{f^3};$$

und hieraus folgt, weil f ein positiver ächter Bruch ist:

$$LL_0 - M^2 = \text{pos.}$$

Somit ist nachgewiesen, dass die $T_n(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *stets positiv sind, für beliebige Werthe von* $\mathfrak{x}'$ *und* $\mathfrak{x}'_0$.

Etwas mühsamer ist der entsprechende Nachweis für das T_0. Substituirt man für B und B_0 ihre eigentlichen Bedeutungen (49.), so nimmt der Ausdruck T_0 (58.) die Gestalt an:

$$T_0 = y^2 + y_0^2 - 2yy_0 \cdot 3\left(\frac{\sqrt{(1-q^2)(1-q_0^2)}\sqrt{f}}{1-f^2}\right)^3;$$

sodass also für diesen Ausdruck T_0 das $(LL_0 - M^2)$ *so* lautet:

$$LL_0 - M^2 = 1 - 9\left(\frac{(1-q^2)(1-q_0^2)f}{(1-f^2)^2}\right)^3;$$

diese letztere Formel kann aber, falls man für f seine eigentliche Bedeutung: $f = qq_0$ einsetzt, auch so geschrieben werden:

$$(\gamma.) \qquad LL_0 - M^2 = 1 - 9\psi^3, \quad \text{wo } \psi = \frac{(1-q^2)(1-q_0^2)qq_0}{(1-q^2q_0^2)^2} \text{ ist.}$$

Ohne erhebliche Schwierigkeiten lässt sich zeigen [vgl. den **Nachtrag**], dass diese Grösse ψ stets zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ liegt. Hieraus folgt alsdann sofort, dass die Grösse $LL_0 - M^2$ stets zwischen 0 und $1 - 9(\frac{1}{4})^2$ bleibt, mithin stets positiv ist.

Somit ist nachgewiesen, dass der Ausdruck T_0 den Bedingungen (β.) entspricht, also stets positiv bleibt. Gleiches aber wurde vorhin schon für die T_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) constatirt. Und Gleiches gilt demgemäss auch von der Summe all' dieser T_0 und T_n, d. i. von T selber (57.). — *Q. e. d.*

Nachtrag. — Dass der in (γ.) aufgeführte Ausdruck ψ stets zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ bleibt, kann, vielleicht am Bequemsten, folgendermassen gezeigt werden. — Setzt man $qq_0 = f$, und führt man in solcher Weise an Stelle von q_0 das f ein, so lautet jener Ausdruck ψ folgendermassen:

$$(\delta.) \qquad \psi = \frac{f}{(1-f^2)^2}(1-q^2)\left(1-\frac{f^2}{q^2}\right).$$

Hieraus folgt sofort:

$$(\varepsilon.) \qquad \psi = \frac{f}{(1-f^2)^2}\left\{(1+f^2) - f\left[\frac{q^2}{f}+\frac{f}{q^2}\right]\right\}.$$

Der hier in den eckigen Klammern stehende Ausdruck ist von der Form $x + x^{-1}$, mithin stets > 2. Somit folgt:

$$(\zeta.) \qquad \psi < \frac{f}{(1-f^2)^2}(1+f^2-2f) = \frac{f(1-f)^2}{(1-f^2)^2} = \frac{f}{(1+f)^2},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\eta.) \qquad \psi < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{f}}+\sqrt{f}\right)^2}.$$

Und hieraus endlich folgt, weil ein Ausdruck von der Form $x + x^{-1}$ stets > 2 ist:

$$(\vartheta.) \qquad \psi < \frac{1}{4}.$$

Dass andererseits aber ψ auch stets $\leqq 0$ ist, folgt direct aus dem ursprünglichen in (γ.) für ψ angegebenen Werthe, falls man nur beachtet, dass q und q_0 positive ächte Brüche vorstellen. *Q. e. d.*

§ 7.

Die Veränderung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit bei entgegengesetzten Bewegungsrichtungen der Kugeln.

Die Coefficienten Z, Z_0 und $(-\mathsf{H})$ im Ausdruck der lebendigen Kraft der Flüssigkeit sind, wie bereits mehrfach bemerkt ist, lediglich Functionen der Centraldistanz E der beiden Kugeln [vgl. z. B. den Satz in (48.)]. Ich werde gegenwärtig zeigen, dass diese Functionen

selber, nämlich Z, Z_0 und $(-H)$ *stets positiv*, und dass andererseits ihre Ableitungen nach E *stets negativ* sind. Ich spreche dabei absichtlich von den Functionen Z, Z_0 und $(-H)$, *nicht* H; weil in solcher Weise die Sätze sich bequemer und gleichmässiger ausdrücken lassen. Uebrigens wird beim Beweis dieser Sätze offenbar von den beiden Functionen Z und Z_0 nur *eine*, z. B. nur Z in Betracht zu ziehen sein. Denn aus der Symmetrie der ganzen Sachlage folgt unmittelbar, dass jeder für Z gefundene Satz unmittelbar auch für Z_0 gelten muss.

Die Formel (50.) geht, falls man daselbst für A, B ihre Werthe (49.) substituirt, über in:

$$Z = \frac{\pi\varrho}{3} R^3 (1 + 3\varphi_1^3 + 3\varphi_2^3 + \dots + 3\varphi_j^3 + \dots), \tag{60.}$$

wo alsdann das φ_j die Bedeutung hat:

$$\varphi_j = \frac{(1-q^2)f^j}{1-q^2 f^{2j}}. \tag{61.}$$

Da die Grössen q, q_0 und $f = qq_0$ positive ächte Brüche sind, so folgt aus diesen Formeln sofort, *dass Z stets positiv ist.* Was nun ferner die Ableitung nach E betrifft, so ergiebt sich aus (61.):

$$\frac{d\log\varphi_j}{dE} = \frac{j(1+q^2f^{2j})}{1-q^2f^{2j}}\frac{d\log f}{dE} + \frac{-2q^2(1-f^{2j})}{(1-q^2f^{2j})(1-q^2)}\frac{d\log q}{dE}.\text{*)} \tag{61. a}$$

Substituirt man hier die früher gefundenen Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{d\log f}{dE} &= -\frac{1}{E}\frac{2(1-f^2)}{(1-q^2)(1-q_0^2)}, \\ \frac{d\log q}{dE} &= -\frac{1}{E}\frac{1+q_0^2}{1-q_0^2}, \\ \frac{d\log q_0}{dE} &= -\frac{1}{E}\frac{1+q^2}{1-q^2}, \qquad \text{[vgl. p. 203]}, \end{aligned} \tag{62.}$$

so erhält man

$$\left(-\frac{d\log\varphi_j}{dE}\right) = \frac{2(1-f^2)\mathfrak{U}}{E(1-q^2)(1-q_0^2)(1-q^2f^{2j})}, \tag{63.}$$

wo $\mathfrak{U}$ die Bedeutung hat:

$$\mathfrak{U} = j(1+q^2f^{2j}) - (1+q_0^2)q^2\frac{1-f^{2j}}{1-f^2}.$$

Dieses $\mathfrak{U}$ kann aber, weil $qq_0 = f$ ist, auch so geschrieben werden

$$\mathfrak{U} = j(1+q^2f^{2j}) - (q^2+f^2)\frac{1-f^{2j}}{1-f^2}.$$

*) Es ist dies genau dieselbe Rechnung, wie früher auf p. 185. In der That sind die gegenwärtigen Formeln (61.), (61. a), *den Buchstaben nach,* identisch mit den damaligen Formeln (51.), (51. a). Weiterhin wird nun aber der Gang der Rechnungen von dem damaligen divergiren.

Dass aber dieser Ausdruck $\mathfrak{U}$, wenn (wie hier der Fall) j eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., und q und f positive ächte Brüche vorstellen, stets einen *positiven Werth* besitzt, ist bereits früher [vgl. ($\mathfrak{k}$.) p. 186] gezeigt worden. Solches constatirt, folgt aber aus (61.) und (63.), dass die

$$\varphi_j \text{ und } \left(-\frac{d \log \varphi_j}{dE}\right), \text{ mithin auch die } \left(-\frac{d\varphi_j}{dE}\right)$$

durchweg positiv sind. Dies überträgt sich, mittelst der Formel (60.), auf Z und $\left(-\frac{dZ}{dE}\right)$, mithin auch auf die parallel stehenden Grössen Z_0 und $\left(-\frac{dZ_0}{dE}\right)$. Und wir gelangen also zu dem Resultat, *dass die Werthe der vier Ausdrücke*

$$(64.)\qquad Z,\ Z_0,\ \textit{und}\ \left(-\frac{dZ}{dE}\right),\quad \left(-\frac{dZ_0}{dE}\right)$$

stets positiv sind.

Wir gehen über zur Untersuchung von H. Die Formel (52.) nimmt, falls man daselbst für A, B, A_0, B_0 ihre Werthe (49.) einsetzt, die Gestalt an:

$$(65.)\qquad (-\text{H}) = \frac{\pi\varrho}{3}\sqrt{R^3R_0^3}\cdot(3\psi_1^3 + 3\psi_2^3 + \cdots + 3\psi_j^3 + \cdots),$$

wo alsdann ψ_j die Bedeutung hat:

$$(66.)\qquad \psi_j = \frac{\sqrt{1-q^2}\sqrt{1-q_0^2}}{\sqrt{f}}\;\frac{f^j}{1-f^{2j}}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach E:

$$\frac{d\log\psi_j}{dE} = \frac{\partial\log\psi_j}{\partial f}\frac{df}{dE} + \frac{\partial\log\psi_j}{\partial q}\frac{dq}{dE} + \frac{\partial\log\psi_j}{\partial q_0}\frac{dq_0}{dE},$$

$$= \left(\frac{j-\frac{1}{2}}{f} + \frac{2jf^{2j-1}}{1-f^{2j}}\right)\frac{df}{dE} + \left(\frac{-q}{1-q^2}\right)\frac{dq}{dE} + \left(\frac{-q_0}{1-q_0^2}\right)\frac{dq_0}{dE},$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{d\log\psi_j}{dE} = \left(\frac{j(1+f^{2j})}{1-f^{2j}} - \frac{1}{2}\right)\frac{d\log f}{dE} - \frac{q^2}{1-q^2}\frac{d\log q}{dE} - \frac{q_0^2}{1-q_0^2}\frac{d\log q_0}{dE}.$$

Substituirt man hier die Werthe (62.), so folgt nach einfachen Reductionen:

$$(67.)\qquad \left(-\frac{d\log\psi_j}{dE}\right) = \frac{(1-f^2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}')}{E(1-q^2)(1-q_0^2)(1-f^{2j})},$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die Bedeutungen haben:

$$(67.\,a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B} = j(1+f^{2j}) - (q^2+q_0^2)\,\dfrac{1-f^{2j}}{1-f^2}, \\ \mathfrak{B}' = j(1+f^{2j}) - (1+f^2)\,\dfrac{1-f^{2j}}{1-f^2}. \end{cases}$$

Diese Grössen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ aber sind, weil j eine der Zahlen 1, 2, 3, ... vorstellt, und q, q_0, sowie auch $f = qq_0$ positive ächte Brüche sind, *stets positiv*; wie sich folgendermassen zeigen lässt. Man bilde die Producte:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_0 &= (1 - q^2)(1 - q_0^2 f^{2j-2}) &&= 1 + f^{2j} - q^2 - q_0^2 f^{2j-2},\\
\mathfrak{Q}_2 &= (1 - q^2 f^2)(1 - q_0^2 f^{2j-4}) &&= 1 + f^{2j} - q^2 f^2 - q_0^2 f^{2j-4},\\
\mathfrak{Q}_4 &= (1 - q^2 f^4)(1 - q_0^2 f^{2j-6}) &&= 1 + f^{2j} - q^2 f^4 - q_0^2 f^{2j-6},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{Q}_{2j-2} &= (1 - q^2 f^{2j-2})(1 - q_0^2) &&= 1 + f^{2j} - q^2 f^{2j-2} - q_0^2;
\end{aligned}$$

und addire dieselben. Alsdann ergiebt sich:

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_4 \cdots + \mathfrak{Q}_{2j-2} = j(1 + f^{2j}) - (q^2 + q_0^2)\frac{1 - f^{2j}}{1 - f^2},$$

oder was dasselbe ist:

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_4 \cdots + \mathfrak{Q}_{2j-2} = \mathfrak{W}. \tag{67. b.}$$

Nun sind die $\mathfrak{Q}$'s, ihrer Definition nach, *stets positiv*. Gleiches gilt daher nach (67. b) auch von $\mathfrak{W}$.

Aus der Art und Weise, wie wir zu diesem Resultat gelangt sind, erkennen wir übrigens sofort, dass jener in (67. a) aufgeführte Ausdruck $\mathfrak{W}$ *stets positiv sein wird*, welche Werthe man den darin enthaltenen positiven ächten Brüchen q, q_0, $f = qq_0$ auch zuertheilen mag, und dass derselbe *auch dann noch positiv* bleiben wird, wenn man jene ächten Brüche q, q_0 (einen oder beide) zu *Eins* werden lässt. Setzt man aber beispielsweise $q = 1$, mithin $q_0 = f$, so verwandelt sich $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{W}'$ [vgl. (67. a)]. *Somit folgt, dass $\mathfrak{W}'$, ebenso wie $\mathfrak{W}$, stets positiv ist.* Solches constatirt, ergiebt sich aus (66.), (67.), dass die

$$\psi_j \text{ und } \left(-\frac{d\log\psi_j}{dE}\right), \text{ mithin auch die } \left(-\frac{d\psi_j}{dE}\right) \tag{67. c}$$

stets positiv sind. Und hieraus folgt weiter, mit Rücksicht auf (65.), *dass*

$$(-\mathsf{H}) \;\; \textit{und} \;\; \left(+\frac{d\mathsf{H}}{dE}\right) \tag{68.}$$

ebenfalls stets positiv sind. Schliesslich gelangen wir durch Zusammenfassung der Sätze (64.) und (68.) zu folgendem Resultat:

Die in dem Ausdruck der lebendigen Kraft der Flüssigkeit enthaltenen Coefficienten Z, Z_0 und H sind Functionen der Centraldistanz E der beiden Kugeln. Und zwar sind diese Functionen von solcher Beschaffenheit, dass die Werthe von

$$\begin{gathered}\mathsf{Z},\ \mathsf{Z}_0,\ (-\mathsf{H}),\\ \textit{und}\ \left(-\frac{d\mathsf{Z}}{dE}\right),\ \left(-\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}\right),\ \frac{d\mathsf{H}}{dE}\end{gathered} \tag{69.}$$

stets positiv sind.

Aus diesem Satze ergeben sich bemerkenswerthe Folgerungen. Wir wollen annehmen, die Kugel σ werde mit der *constanten* Geschwindigkeit G in der Richtung der x-Axe, und die andere Kugel σ_0 mit der ebenfalls *constanten* Geschwindigkeit G_0 in der *entgegengesetzten* Richtung fortgeführt, sodass also $\mathfrak{x}' = + G$ und $\mathfrak{x}_0' = - G_0$ ist. Alsdann ergiebt sich für die lebendige Kraft T der Flüssigkeit der Werth:

$$(70.) \qquad T = \mathsf{Z}G^2 + \mathsf{Z}_0 G_0^2 - 2\mathsf{H}GG_0, \qquad \text{[vgl. (48.) p. 213].}$$

Bei dieser Bewegung der beiden Kugeln ist aber ihr Central-Abstand E in beständigem Wachsen begriffen. Somit folgt aus (69.), dass der Werth von T bei der genannten Bewegung fortwährend *abnimmt*. — *Und umgekehrt wird die lebendige Kraft der Flüssigkeit fortdauernd wachsen, falls man die beiden Kugeln mit constanten Geschwindigkeiten gegen einander zueilen lässt; sodass das Maximum der lebendigen Kraft in dem Augenblick eintritt, wo die beiden Kugeln zur Berührung gelangen; während andererseits die lebendige Kraft der Flüssigkeit ihren Minimalwerth in dem Augenblick haben wird, wo die beiden Kugeln unendlich weit von einander entfernt sind.* Dieser Minimalwerth ist, wie sich aus den spätern Formeln (13.) p. 236 ergiebt:

$$= \frac{\pi\varrho}{3}(R^3G^2 + R_0^3G_0^2);$$

was übrigens auch leicht abgeleitet werden kann aus der früher gefundenen Formel (21.) p. 82.

Die hier soeben aufgestellten Sätze beziehen sich immer nur auf den Fall, dass die *absoluten* Bewegungen der beiden Kugeln *einander entgegengesetzte* Richtungen haben. Wie sich die Dinge gestalten, wenn die absoluten Bewegungen von *gleicher* Richtung sind, soll im folgenden § untersucht werden.

§ 8.

Die Veränderung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit bei übereinstimmenden Bewegungsrichtungen der beiden Kugeln*).

Nach (69.) sind $\frac{d\mathsf{Z}}{dE}$ und $\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}$ *negativ*, hingegen $\frac{d\mathsf{H}}{dE}$ *positiv*. Versteht man also unter c^2 und c_0^2 zwei *willkürlich gegebene positive, und von 0 verschiedene Constanten*, so sind die Vorzeichen der beiden Ausdrücke:

$$(71.) \qquad \Omega = \frac{d\mathsf{Z}}{dE} + c^2\frac{d\mathsf{H}}{dE} \quad \text{und} \quad \Omega_0 = \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE} + c_0^2\frac{d\mathsf{H}}{dE}$$

*) Der Leser wird vielleicht gut thun, die etwas mühsamen Rechnungen dieses § zuvörderst zu überschlagen, und auf dieselben erst dann einzugehen, wenn solches durch die *weiter folgenden* Betrachtungen geboten ist.

nicht ohne Weiteres angebbar, vielmehr negativ oder positiv, je nachdem in diesen Ausdrücken die ersten oder die zweiten Glieder überwiegen sollten. Ich werde nun zeigen, dass eine Prävalenz der zweiten Glieder, mithin ein *Positivwerden* von Ω, Ω_0 stets eintreten muss, falls man die beiden Kugeln hinreichend *von einander entfernt*. Dabei können die positiven Constanten c^2 und c_0^2, wie schon gesagt, *ad libitum* gegeben gedacht werden; nur wird vorausgesetzt, dass sie *von Null verschieden* sind.

Nach (60.) und (65.) ist:

$$\mathsf{Z} = \frac{\pi\varrho}{3} (\sqrt{RR})^3 [1 + 3\varphi_1^3 + 3\varphi_2^3 \cdots + 3\varphi_j^3 + \cdots],$$

$$\mathsf{H} = \frac{\pi\varrho}{3} (\sqrt{RR_0})^3 [0 - 3\psi_1^3 - 3\psi_2^3 \cdots - 3\psi_j^3 - \cdots],$$

mithin:

$$\Omega = \frac{d\mathsf{Z}}{dE} + c^2 \frac{d\mathsf{H}}{dE} = 3\pi\varrho (\sqrt{R})^3 \cdot \sum_{j=1}^{j=\infty} \left[(\sqrt{R})^3 \varphi_j^2 \frac{d\varphi_j}{dE} - c^2 (\sqrt{R_0})^3 \psi_j^2 \frac{d\psi_j}{dE} \right],$$

oder, falls man unter dem Summenzeichen für R und R_0 die bekannten Werthe $\frac{2aq}{1-q^2}$ und $\frac{2aq_0}{1-q_0^2}$ [vgl. (g.) p. 202] substituirt:

$$\Omega = 3\pi\varrho (\sqrt{2aR})^3 \cdot \sum_{j=1}^{j=\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1-q^2}} \varphi_j \right)^3 \frac{d \log \varphi_j}{dE} - c^2 \left(\frac{\sqrt{q_0}}{\sqrt{1-q_0^2}} \psi_j \right)^3 \frac{d \log \psi_j}{dE} \right].$$

Schreibt man hiefür zur Abkürzung:

$$\Omega = 3\pi\varrho (\sqrt{2aR})^3 \cdot \sum_{j=1}^{j=\infty} \omega_j, \tag{72.}$$

so kann man das ω_j folgendermassen darstellen:

$$\omega_j = c^2 \left(\frac{\sqrt{q_0}}{\sqrt{1-q_0^2}} \psi_j \right)^3 \left(- \frac{d \log \psi_j}{dE} \right) \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q_0}} \frac{\sqrt{1-q_0^2}}{\sqrt{1-q^2}} \frac{\varphi_j}{\psi_j} \right)^3 \frac{d \log \varphi_j}{d \log \psi_j} \right]. \tag{73.}$$

Nun ist nach (61.), (63.) ferner (66.), (67.):

$$\text{(73. a.)} \quad \begin{aligned} \varphi_j &= \frac{(1-q^2) f^j}{1-q^2 f^{2j}}, & \frac{d \log \varphi_j}{dE} &= \frac{-2(1-f^2)\mathfrak{U}}{E(1-q^2)(1-q_0^2)(1-q^2 f^{2j})}, \\ \psi_j &= \frac{\sqrt{1-q^2}\sqrt{1-q_0^2} \cdot f^j}{\sqrt{qq_0}(1-f^{2j})}, & \frac{d \log \psi_j}{dE} &= \frac{-(1-f^2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}')}{E(1-q^2)(1-q_0^2)(1-f^{2j})}, \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\varphi_j}{\psi_j} = \frac{\sqrt{1-q^2}\sqrt{qq_0}(1-f^{2j})}{\sqrt{1-q_0^2}(1-q^2 f^{2j})}, \quad \frac{d \log \varphi_j}{d \log \psi_j} = \frac{1-f^{2j}}{1-q^2 f^{2j}} \frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'};$$

wodurch der in (73.) in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck die Gestalt erhält:

$$\Big[\quad\Big] = 1 - \frac{1}{c^2} q^3 \left(\frac{1-f^{2j}}{1-q^2 f^{2j}}\right)^4 \frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}+\mathfrak{V}'}.$$

Substituirt man dies in (73.), und setzt man dabei zur augenblicklichen Abkürzung:

(74.) $$\chi = \frac{1-f^{2j}}{1-q^2 f^{2j}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{W} = \frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}+\mathfrak{V}'},$$

und beachtet man gleichzeitig, dass der in (73.) *vor* der eckigen Klammer stehende Factor, nach (67. c), stets *positiv* ist, so erhält man:

(75.) $$\omega_j = (\text{Pos. F.}) \left[1 - \frac{1}{c^2} q^3 \chi^4 \mathfrak{W}\right],$$

wo unter dem (Pos. F.) jener positive Factor verstanden werden soll.

Zur weiteren Untersuchung des Ausdrucks ω_j, (75.) ist nun zuvörderst ein näheres Eingehen auf die Werthe von χ und $\mathfrak{W}$ erforderlich. Nach (74.) ist:

(α.) $$\chi = \frac{1-f^{2j}}{1-q^2 f^{2j}} = 1 - \frac{(1-q^2) f^{2j}}{1-q^2 f^{2j}},$$

also mit Rücksicht auf (73. a):

(β.) $$\chi = 1 - f^j \varphi_j.$$

Bei wachsender Centraldistanz E sind q, q_0 und f, wie aus (62.) folgt, in *fortwährender Verkleinerung* begriffen. Und Gleiches gilt nach (73. a) auch von φ_j. Somit zeigt die Formel (β.), *dass die Grösse* χ *bei wachsendem* E *in fortwährendem Wachsen begriffen ist.* Und es wird also dieses χ stets zwischen denjenigen beiden Specialwerthen sich befinden, welche dasselbe einerseits bei der Berührung der beiden Kugeln, andererseits bei unendlicher Entfernung derselben von einander annimmt. Für den Fall der Berührung sind q, q_0, f alle $= 1$, also nach (74.): $\chi = \frac{0}{0}$. In Wirklichkeit findet man aus (74.) nach bekannter Regel:

$$\chi = \frac{2jf^{2j-1}\frac{df}{dE}}{2jq^2 f^{2j-1}\frac{df}{dE} + 2qf^{2j}\frac{dq}{dE}},$$

also weil bei der Berührung q und f zu *Eins* werden, während gleichzeitig das Verhältniss $\frac{dq}{dE} : \frac{df}{dE}$ den früher [in (g.) p. 206] notirten Werth $R_0 : (R + R_0)$ annimmt:

$$(\gamma.)\qquad \chi = \frac{j(R+R_0)}{j(R+R_0)+R_0};\quad \text{(Werth bei der Berührung).}$$

Lässt man andererseits die beiden Kugeln sich ins Unendliche von einander entfernen, so werden q, q_0 und f zu *Null*, also nach (74.):

$$(\delta.)\qquad \chi = 1;\quad \text{(Werth bei unendlicher Entfernung).}$$

Da nun χ stets zwischen diesen in (γ.) und (δ.) angegebenen Specialwerthen bleibt, so ergiebt sich also für *jeden beliebigen* Werth von χ die Formel:

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{j(R+R_0)}{j(R+R_0)+R_0} \leqq \chi \leqq 1.$$

Das j ist seiner Definition nach [vgl. (72.)] eine der Zahlen 1, 2, 3, ... Die linke Seite der Formel (ε.) wird daher noch weiter verkleinert werden, wenn man ihren Nenner um $jR + (j-1)R_0$ vermehrt. Somit folgt also *a fortiori*:

$$(\zeta.)\qquad \tfrac{1}{2} \leqq \chi \leqq 1.$$

Was ferner $\mathfrak{W}$ betrifft, so ist nach (74.)

$$(\eta.)\qquad \frac{2}{\mathfrak{W}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}} + \frac{\mathfrak{V}'}{\mathfrak{U}};$$

und weiter nach p. 186 und 219:

$$(\vartheta.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_4 + \cdots + \mathfrak{P}_{2j-2}, \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_4 + \cdots + \mathfrak{Q}_{2j-2}, \\ \mathfrak{V}' &= \mathfrak{Q}'_0 + \mathfrak{Q}'_2 + \mathfrak{Q}'_4 + \cdots + \mathfrak{Q}'_{2j-2}. \end{aligned}$$

Hier haben die $\mathfrak{P}$'s die Bedeutungen:

$$(\iota.)\begin{cases} \mathfrak{P}_0 = (1-q^2)\,(1-f^2f^{2j-2}), \\ \mathfrak{P}_2 = (1-q^2f^2)(1-f^2f^{2j-4}), \\ \mathfrak{P}_4 = (1-q^2f^4)(1-f^2f^{2j-6}), \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_{2j-2} = (1-q^2f^{2j-2})(1-f^2f^0), \end{cases} \quad \text{d.i.}\ (\iota'.)\begin{cases} \mathfrak{P}_0 = (1-q^2)(1-f^{2j}), \\ \mathfrak{P}_2 = (1-q^2f^2)(1-f^{2j-2}), \\ \mathfrak{P}_4 = (1-q^2f^4)(1-f^{2j-4}), \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_{2j-2} = (1-q^2f^{2j-2})(1-f^2), \end{cases}$$

ferner die $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ folgende Bedeutungen:

$$(\varkappa.)\begin{cases} \mathfrak{Q}_0 = (1-q^2)(1-q_0^2f^{2j-2}), \\ \mathfrak{Q}_2 = (1-q^2f^2)(1-q_0^2f^{2j-4}), \\ \mathfrak{Q}_4 = (1-q^2f^4)(1-q_0^2f^{2j-6}), \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{Q}_{2j-2} = (1-q^2f^{2j-2})(1-q_0^2), \end{cases} \qquad (\varkappa'.)\begin{cases} \mathfrak{Q}'_0 = (1-f^0)(1-f^{2j}), \\ \mathfrak{Q}'_2 = (1-f^2)(1-f^{2j-2}), \\ \mathfrak{Q}'_4 = (1-f^4)(1-f^{2j-4}), \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{Q}'_{2j-2} = (1-f^{2j-2})(1-f^2). \end{cases}$$

Es geht nämlich $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{W}'$ über, falls man $q = 1$ und $q_0 = f$ werden lässt [vgl. p. 219]; und dementsprechend repräsentiren die $\mathfrak{Q}'$ ($\varkappa'$.) diejenigen Werthe, in welche die $\mathfrak{Q}$ ($\varkappa$.) für $q = 1$ und $q_0 = f$ sich verwandeln.

Beachtet man, dass q, q_0 und $f = qq_0$ positive ächte Brüche sind, mithin z. B. $f < q$, und ebenso $f < q_0$ ist, so ergiebt sich:

durch Vergleichung von (ι.) und ($\varkappa$.):

$$(\lambda.)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_0 \leqq \mathfrak{P}_0, \\ \mathfrak{Q}_2 < \mathfrak{P}_2, \\ \mathfrak{Q}_4 < \mathfrak{P}_4, \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

und durch Vergleichung von (ι'.) und ($\varkappa'$.):

$$(\lambda'.)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_0' \leqq \mathfrak{P}_0 \\ \mathfrak{Q}_2' \leqq \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{Q}_4' \leqq \mathfrak{P}_4 \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Ferner erhält man

aus den Formeln (ι.):

$$(\mu.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_0 \leqq 1, \\ \mathfrak{P}_2 < 1, \\ \mathfrak{P}_4 < 1, \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

und aus den Formeln ($\varkappa$.):

$$(\mu'.)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_0 \geqq (1-q^2)(1-q_0^2), \\ \mathfrak{Q}_2 \geqq (1-q^2)(1-q_0^2), \\ \mathfrak{Q}_4 \geqq (1-q^2)(1-q_0^2), \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Aus (λ.), (λ'.) erhält man weiter, mit Rücksicht auf (ϑ.):

$$(\nu.)\qquad \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}} = \frac{\Sigma\mathfrak{Q}}{\Sigma\mathfrak{P}} \leqq 1, \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{U}} = \frac{\Sigma\mathfrak{Q}'}{\Sigma\mathfrak{P}} \leqq 1,$$

und aus (μ.), (μ'.):

$$(\xi.)\qquad \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}} = \frac{\Sigma\mathfrak{Q}}{\Sigma\mathfrak{P}} > \frac{f(1-q^2)(1-q_0^2)}{f}; \qquad \text{überdiess ist } \frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{U}} \geqq 0;$$

diese letzte Formel für $\frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{U}}$ unterliegt nämlich keinem Zweifel, weil die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, zufolge (ϑ.), (ι.), ($\varkappa$.), ($\varkappa'$.), stets *positiv* sind. Endlich ergiebt sich jetzt aus (η.), mit Hinblick auf (ν.), (ξ.):

$$(o.)\qquad (1-q^2)(1-q_0^2) \leqq \frac{2}{\mathfrak{W}} \leqq 2,$$

oder was dasselbe ist:

$$(\pi.)\qquad \frac{1}{(1-q^2)(1-q_0^2)} \geqq \frac{\mathfrak{W}}{2} \geqq \frac{1}{2};$$

so dass man also durch Zusammenstellung von (ξ.) und (π.) zu folgenden ganz allgemein gültigen Formeln gelangt:

$$(76.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \\ 1 \leqq \mathfrak{W} \leqq \frac{2}{(1-q^2)(1-q_0^2)}. \end{cases}$$

Nun war in (75.) gefunden:

$$(77.)\qquad \omega_j = (\text{Pos. F.}) \cdot \left[1 - \left\{\frac{1}{c^2} q^3 \chi^4 \mathfrak{W}\right\}\right].$$

Zufolge (76.) gilt daher für dieses ω_j einerseits die Formel:

$$(78.)\qquad \omega_j > (\text{Pos. F.}) \cdot \left[1 - \left\{\frac{1}{c^2} q^3 \frac{2}{(1-q^2)(1-q_0^2)}\right\}\right],$$

und andererseits auch folgende Formel:

$$(79.)\qquad \omega_j < (\text{Pos. F.}) \cdot \left[1 - \left\{\frac{1}{c^2} q^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\right].$$

Lässt man die Centraldistanz E der beiden Kugeln ins Unendliche wachsen, so convergiren q und q_0 beide gegen *Null* [vgl. z. B. (σ.) p. 205. Durch ein hinreichendes Anwachsenlassen von E wird man daher in (78.) den daselbst in der *geschweiften* Klammer enthaltenen Ausdruck unter 1 hinabdrücken können. Solches aber ausgeführt gedacht, werden alsdann, nach (78.), die Grössen ω_j, d. i. $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ bei weiterem Anwachsen von E durchweg positiv bleiben. Und Gleiches gilt daher nach (72.) auch von dem zu untersuchenden Ausdruck Ω. *Man wird also, falls die Constante c^2 gegeben ist, stets einen Werth E' der Centraldistanz finden können, von solcher Grösse, dass die von E abhängende Function Ω im Intervalle $E = E' \ldots\ldots \infty$ durchweg positiv bleibt.*

Versteht man also in dem Ausdruck

$$(80.\text{ a})\qquad \Omega = \frac{d\mathsf{Z}}{dE} + c^2 \frac{d\mathsf{H}}{dE}$$

unter c^2 eine beliebig gegebene, jedoch positive und von 0 verschiedene Constante, so wird sich stets in dem Intervall $E = (R + R_0) \ldots\ldots \infty$ ein Punct E' markiren lassen:

$$(R + R_0) < E' < \infty,$$

von solcher Lage, dass jene von E abhängende Function Ω im Intervall $E' \ldots\ldots \infty$ durchweg positiv ist. — Dass ein analoger Satz auch gilt für den Ausdruck:

$$(80.\text{ b})\qquad \Omega_0 = \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE} + c_0^2 \frac{d\mathsf{H}}{dE}, \quad [\text{vgl. } (71.)],$$

bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Nehmen wir nun an, die beiden Kugeln bewegten sich (durch irgend welche Ursachen) mit *constanten* Geschwindigkeiten G und G_0 beide in *gleicher* Richtung vorwärts, also entweder beide in der Rich-

tung der x-Axe, oder beide in der entgegengesetzten Richtung. Alsdann hat die lebendige Kraft T der Flüssigkeit im einen wie im andern Fall den Werth:

(81.) $$T = \mathsf{Z}G^2 + 2\mathsf{H}GG_0 + \mathsf{Z}_0G_0^2,$$ [vgl. (48.) p. 213];

woraus folgt:

(82.) $$\frac{dT}{dE} = \frac{d\mathsf{Z}}{dE}G^2 + 2\frac{d\mathsf{H}}{dE}GG_0 + \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}G_0^2,$$

oder was dasselbe ist:

(83.) $$\frac{dT}{dE} = G^2\left(\frac{d\mathsf{Z}}{dE} + \frac{G_0}{G}\frac{d\mathsf{H}}{dE}\right) + G_0^2\left(\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE} + \frac{G}{G_0}\frac{d\mathsf{H}}{dE}\right).$$

Auf die beiden eingeklammerten Ausdrücke sind aber die Sätze (80. a, b) sofort anwendbar. Und hiedurch gelangt man alsdann zu folgendem Resultat:

Bewegen sich die Kugeln beide nach derselben Richtung mit constanten, endlichen und von Null verschiedenen Geschwindigkeiten G und G_0, so wird sich in dem Intervall $E = (R + R_0) \dots \infty$ stets ein Punct E' angeben lassen:

(84.) $$(R + R_0) < E' < \infty,$$

von solcher Lage, dass der Differentialquotient $\frac{dT}{dE}$ im Intervall $E' \dots \infty$ durchweg positiv ist.

Dieser Satz lässt sich unmittelbar auf T selber übertragen; wobei im Ganzen drei Fälle zu unterscheiden sind; denn je nach der Beschaffenheit der constanten und gleichgerichteten Geschwindigkeiten G und G_0 ist der Central-Abstand E entweder in fortdauerndem *Wachsen*, oder in fortdauerndem *Abnehmen*, oder aber *constant*.

Wenden wir uns zuvörderst zum Falle des wachsenden E, und verfolgen wir dabei die Kugeln vom Augenblick der Berührung bis zu weiteren und weiteren Entfernungen, so wird die lebendige Kraft T der Flüssigkeit bei den aufeinander folgenden Positionen:

(84. a) $$(R + R_0) \dots E' \dots \infty$$

im letzten Intervall $E' \dots \infty$ beständig wachsen. Wie ihr Verhalten im ersten Intervall $(R + R_0) \dots E'$ beschaffen ist, bleibt dabei unbekannt (eine noch der weitern Untersuchung bedürftige Frage).

Aehnliches ist zu bemerken bei dem Fall des *abnehmenden* E, wobei man alsdann die Bewegung der Kugeln zu verfolgen hat von $E = \infty$ bis $E = R + R_0$. Was schliesslich den Fall des *constanten* E betrifft, so wird in diesem Fall die lebendige Kraft T der Flüssigkeit ebenfalls *constant* sein; wie z. B. aus (81.) sofort ersichtlich ist.

§ 9.

Bestimmung eines gewissen, für die weiteren Untersuchungen wichtigen Vorzeichens.

In Folge der vorhergehenden Untersuchungen sind wir bekannt mit den Vorzeichen von $\frac{dZ}{dE}, \frac{dZ_0}{dE}, \frac{dH}{dE}$, (vgl. den Satz p. 219), hingegen noch *unbekannt* mit den Vorzeichen der Grösse

$$\frac{d(Z + 2H + Z_0)}{dE}. \tag{1.}$$

Gerade das Vorzeichen dieser letztern Grösse ist aber für unsere weiteren Betrachtungen von besonderer Wichtigkeit.

Leider scheinen die bisher von mir benutzten Methoden zur Ausfüllung dieser Lücke nicht ausreichend. Und ich sehe mich daher genöthigt, zu einer *neuen Methode* meine Zuflucht zu nehmen, die sich übrigens gewissen von *Bobylew* in der Elektrostatik angestellten Betrachtungen einigermassen anlehnt. (Vgl. *Bobylew*'s Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 7.)

Differenzirt man die auf p. 221 angegebenen Grössen Z, H nach der Centraldistanz E, und bedient man sich dabei des an jener Stelle (p. 221) angegebenen Weges, so findet man ohne besondere Mühe:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dE} &= -\,\mathfrak{M}\cdot 2\overline{\mathfrak{U}}, \\ \frac{dH}{dE} &= +\,\mathfrak{M}\cdot(\overline{\mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{B}'}), \end{aligned} \tag{2.}$$

wo $\mathfrak{M}$ einen *positiven* Factor vorstellt vom Werthe:

$$\mathfrak{M} = \frac{3\pi\varrho(2a)^3(1-f^2)}{E(1-q^2)(1-q_0^2)}; \tag{3.}$$

während $\overline{\mathfrak{U}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{B}'}$ folgende Summen vorstellen:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{U}} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{q^3 f^{3j}\,\mathfrak{U}}{(1-q^2 f^{2j})^4}, \\ \overline{\mathfrak{B}} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{f^{3j}\,\mathfrak{B}}{(1-f^{2j})^4}, \\ \overline{\mathfrak{B}'} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{f^{3j}\,\mathfrak{B}'}{(1-f^{2j})^4}. \end{aligned} \tag{4.}$$

Dabei haben $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ die früher festgesetzten Bedeutungen. Nach (ϑ.), (ι'.), ($\varkappa$.), ($\varkappa'$.) p. 223 ist mithin:

$$\mathfrak{U} = \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - q^2 f^{2k})(1 - f^{2j-2k}),$$

$$\mathfrak{B} = \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - q^2 f^{2k})(1 - q_0^2 f^{2j-2k-2}),$$

$$\mathfrak{B}' = \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - f^{2k})(1 - f^{2j-2k}).$$

Dies in (4.) substituirt, erhält man:

$$\overline{\mathfrak{U}} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{q^3 f^{3j}}{(1 - q^2 f^{2j})^4} \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - q^2 f^{2k})(1 - f^{2j-2k}) \right),$$

$$(5.) \qquad \overline{\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{f^{3j}}{(1 - f^{2j})^4} \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - q^2 f^{2k})(1 - q_0^2 f^{2j-2k-2}) \right),$$

$$\overline{\mathfrak{B}'} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{f^{3j}}{(1 - f^{2j})^4} \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - f^{2k})(1 - f^{2j-2k}) \right).$$

Es handelt sich nun für unsere Zwecke vor allen Dingen um eine gewisse Transformation dieser drei Ausdrücke $\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{B}'}$. Und zu diesem Behuf bemerken wir, dass dieselben sämmtlich von der Form sind:

$$(6.) \qquad \mathfrak{S} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{\alpha^3 f^{3j}}{(1 - \alpha^2 f^{2j})^4} \sum_{k=0}^{k=j-1} (1 - \beta^2 f^{2k})(1 - \gamma^2 f^{2j-2k}) \right);$$

in der That verwandelt sich $\mathfrak{S}$ der Reihe nach in $\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{B}'}$, sobald man über die α, β, γ jedesmal in geeigneter Weise disponirt. Demgemäss werden wir unsere Untersuchungen mit diesem *allgemeinen* Ausdruck $\mathfrak{S}$ beginnen, und zuvördesst *diesen* der in Rede stehenden Transformation unterwerfen.

Vertauscht man in (6.) die Aufeinanderfolge der beiden Summationen, so erhält man durch einfache Ueberlegungen:

$$(7.) \qquad \mathfrak{S} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{j=k+1}^{j=\infty} \left(\frac{\alpha^3 f^{3j}}{(1 - \alpha^2 f^{2j})^4} (1 - \beta^2 f^{2k})(1 - \gamma^2 f^{2j-2k}) \right).$$

Es ist aber nach dem Binomischen Satze:

$$(8.) \qquad \frac{1}{(1 - \alpha^2 f^{2j})^4} = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p \alpha^{2p} f^{2jp}, \quad \text{wo } C_p = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (p+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}.$$

Somit folgt aus (7.), falls man zur Abkürzung $2p + 3 = g$ setzt:

$$\mathfrak{S} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(C_p \alpha^g \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{j=k+1}^{j=\infty} f^{gj} (1 - \beta^2 f^{2k})(1 - \gamma^2 f^{2j-2k}) \right),$$

oder, falls man jetzt die Summation nach j wirklich ausführt:

$$\mathfrak{S} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(C_p \alpha^g \sum_{k=0}^{k=\infty} \left[\frac{(1 - \beta^2 f^{2k}) f^{g(k+1)}}{1 - f^g} - \frac{\gamma^2 (f^{-2k} - \beta^2) f^{(g+2)(k+1)}}{1 - f^{g+2}} \right] \right).$$

oder, falls man schliesslich die Summation nach k ebenfalls ausführt:

$$(9.)\quad \mathfrak{S} = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p (\alpha f)^g \left(\frac{1}{1-f^g} - \frac{\beta^2}{1-f^{g+2}}\right)\left(\frac{1}{1-f^g} - \frac{\gamma^2 f^2}{1-f^{g+2}}\right).$$

Der allgemeine Ausdruck $\mathfrak{S}$ geht aber, nach (5.), (6.), über

in $\bar{\mathfrak{U}}$, für $\alpha = q,\quad \beta = q,\quad \gamma = 1,$

in $\bar{\mathfrak{V}}$, für $\alpha = 1,\quad \beta = q,\quad \gamma = \frac{1}{q} = \frac{q_0}{f},$

in $\bar{\mathfrak{V}}'$, für $\alpha = 1,\quad \beta = 1,\quad \gamma = 1.$

Somit folgt aus (9.), mit Rücksicht darauf, dass $f = qq_0$ ist:

$$\bar{\mathfrak{U}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p \left(\frac{q^g}{1-f^g} - \frac{q^{g+2}}{1-f^{g+2}}\right)\left(\frac{f^g}{1-f^g} - \frac{f^{g+2}}{1-f^{g+2}}\right),$$

$$(10.)\quad \bar{\mathfrak{V}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p \left(\frac{q^g}{1-f^g} - \frac{q^{g+2}}{1-f^{g+2}}\right)\left(\frac{q_0^g}{1-f^g} - \frac{q_0^{g+2}}{1-f^{g+2}}\right),$$

$$\bar{\mathfrak{V}}' = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p \left(\frac{1}{1-f^g} - \frac{1}{1-f^{g+2}}\right)\left(\frac{f^g}{1-f^g} - \frac{f^{g+2}}{1-f^{g+2}}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$F = \frac{f^g}{1-f^g} - \frac{f^{g+2}}{1-f^{g+2}},\quad \text{d. i.} = \frac{1}{1-f^g} - \frac{1}{1-f^{g+2}},$$

$$(11.)\quad Q = \frac{q^g}{1-f^g} - \frac{q^{g+2}}{1-f^{g+2}},$$

$$Q_0 = \frac{q_0^g}{1-f^g} - \frac{q_0^{g+2}}{1-f^{g+2}},\quad \text{wo überall } g = 2p+3 \text{ sein soll,}$$

so erhält man aus (10.)

$$(12.)\quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{U}} &= \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p Q F, \\ \bar{\mathfrak{V}} + \bar{\mathfrak{V}}' &= \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p (Q Q_0 + F^2). \end{aligned}$$

Demgemäss folgt aus (2.):

$$(13.)\quad 2\frac{d\mathsf{H}}{dE} = +\, 2\mathfrak{M} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p (Q Q_0 + F^2),$$

ferner:

$$(14.)\quad \frac{d\mathsf{Z}}{dE} = -\, 2\mathfrak{M} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p F Q,$$

und der letzten Formel entsprechend:

$$(15.)\quad \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE} = -\, 2\mathfrak{M} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p F Q_0.$$

Versteht man aber unter T *die lebendige Kraft der Flüssigkeit*, ferner unter $\mathfrak{x}' = G$ und $\mathfrak{x}'_1 = G_0$ die augenblicklichen Geschwindigkeiten der beiden Kugelmittelpuncte, so ist bekanntlich:

$$(16.) \qquad \frac{dT}{dE} = \frac{dZ}{dE} G^2 + 2\frac{dH}{dE} GG_0 + \frac{dZ_0}{dE} G_0^2, \quad \text{[vgl. (82.) p. 226].}$$

Substituirt man hier die Werthe (13.), (14.), (15.), so folgt:

$$(17.) \qquad \frac{dT}{dE} = 2\mathfrak{M}\sum_{p=0}^{p=\infty} C_p\left[(QQ_0 + F^2)GG_0 - FQG^2 - FQ_0G_0^2\right],$$

oder was dasselbe ist:

$$(18.) \qquad \frac{dT}{dE} = 2\mathfrak{M}\sum_{p=0}^{p=\infty} C_p(QG - FG_0)(Q_0G_0 - FG),$$

eine durch Einfachheit und Symmetrie ausgezeichnete Formel, in welcher $\mathfrak{M}$, C_p, *und* Q, Q_0, F *die in* (3.), (8.) *und* (11.) *angegebenen Bedeutungen haben.*

Für den speciellen Fall, dass G und G_0 beide $= 1$ sind, erhält man aus (16.) und (18.):

$$(19.) \qquad \frac{d(Z + 2H + Z_0)}{dE} = 2\mathfrak{M}\sum_{p=0}^{p=\infty} C_p(Q - F)(Q_0 - F).$$

Und mittelst dieser letztern Formel lässt sich nun leicht das *Vorzeichen* des Ausdrucks (19.) ermitteln. Nach (11.) ist nämlich:

$$Q - F = -\frac{1 - q^g}{1 - f^g} + \frac{1 - q^{g+2}}{1 - f^{g+2}}, \quad \text{wobei } g = 2p + 3;$$

oder was dasselbe:

$$Q - F = \frac{1-q}{1-f}\left(-\frac{1 + q + q^2 \ldots + q^{g-1}}{1 + f + f^2 \ldots + f^{g-1}} + \frac{1 + q + q^2 \ldots + q^{g+1}}{1 + f + f^2 \ldots + f^{g+1}}\right).$$

Setzt man also für den Augenblick

$$\varkappa = 1 + q + q^2 \ldots + q^{g-1},$$
$$\varphi = 1 + f + f^2 \ldots + f^{g-1},$$

so wird

$$Q - F = \frac{1-q}{1-f}\left(-\frac{\varkappa}{\varphi} + \frac{\varkappa + q^g + q^{g+1}}{\varphi + f^g + f^{g+1}}\right)$$

oder was dasselbe ist:

$$(20.) \qquad Q - F = \frac{1-q}{1-f}\,\frac{\mathfrak{z}}{\varphi(\varphi + f^g + f^{g+1})},$$

wo der Zähler $\mathfrak{z}$ den Werth hat:

$$\mathfrak{z} = (q^g + q^{g+1})\varphi - (f^g + f^{g+1})\varkappa.$$

Substituirt man hier für φ und $\varkappa$ ihre eigentlichen Bedeutungen, so folgt:

$$\mathfrak{z} = \sum_{n=0}^{n=g-1} \left[(q^g + q^{g+1})f^n - (f^g + f^{g+1})q^n\right],$$

d. i.:

$$(21.)\quad \mathfrak{z} = \sum_{n=0}^{n=g-1} \left[(qf)^n (q^{g-n} - f^{g-n}) + (qf)^n (q^{g-n+1} - f^{g-n+1})\right];$$

und hieraus erkennt man, weil $q \geqq f$ ist, dass jener Zähler $\mathfrak{z}$ stets *positiv* sein wird. Somit folgt aus (20.), dass $Q - F$ ebenfalls *positiv* ist. Und Gleiches gilt offenbar auch von $Q_0 - F$. Gleiches gilt überdiess auch von $\mathfrak{M}$ (3.) und von C_p (8.). *Demgemäss ergiebt sich aus* (19.), *dass der Ausdruck*

$$(22.)\quad \frac{d(\mathsf{Z} + 2\mathsf{H} + \mathsf{Z}_0)}{dE}$$

unter allen Umständen positiv *ist.*

Da übrigens f, q, q_0 positive ächte Brüche sind, so folgt aus (11.), dass F, Q, Q_0 *positiv* sind. Gleiches gilt daher nach (13.), (14.), (15.) auch von

$$(23.)\quad \frac{d\mathsf{H}}{dE},\ \left(-\frac{d\mathsf{Z}}{dE}\right),\ \left(-\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}\right);$$

was in Einklang steht mit dem früher erhaltenen Satz p. 219.

Bemerkung. — Die beiden aus (22.) und (23.) entspringenden Formeln:

$$\frac{d(2\mathsf{H} + \mathsf{Z} + \mathsf{Z}_0)}{dE} = \text{pos.},$$

$$\frac{d(2\mathsf{H} - \mathsf{Z} - \mathsf{Z}_0)}{dE} = \text{pos.}$$

führen sofort zu dem Resultat, dass

$$\text{abs}\,\frac{d(2\mathsf{H})}{dE} \geqq \text{abs}\,\frac{d(\mathsf{Z} + \mathsf{Z}_0)}{dE}$$

ist. Hieraus folgt weiter:

$$4\left(\frac{d\mathsf{H}}{dE}\right)^2 \geqq \left(\frac{d\mathsf{Z}}{dE} + \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}\right)^2,$$

mithin *a fortiori:*

$$(24.)\quad \left(\frac{d\mathsf{H}}{dE}\right)^2 \geqq \frac{d\mathsf{Z}}{dE}\,\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}.$$

Und aus dieser letzten Formel (24.) ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(25.)\quad \frac{dT}{dE} = \frac{d\mathsf{Z}}{dE}G^2 + 2\frac{d\mathsf{H}}{dE}GG_0 + \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}G_0^2,$$

bei *festgehaltenem* (übrigens beliebig gegebenem) E, stets zum Verschwinden gebracht werden kann durch passende Wahl von G und G_0. Demgemäss ergiebt sich folgender Satz:

Man kann das Verhältniss $V = \frac{G}{G_0}$ *der beiden constanten Geschwindigkeiten* G *und* G_0 *stets in solcher Weise bestimmen, dass der Differential-Quotient* $\frac{dT}{dE}$ *bei einer gegebenen Centraldistanz* E *verschwindet. Und zwar erhält man bei Lösung dieser Aufgabe stets zwei Werthe von* V. *Jeder von diesen Werthen ist positiv, sodass also jene zum Verschwinden von* $\frac{dT}{dE}$ *erforderlichen Geschwindigkeiten* G *und* G_0 *unter allen Umständen von einerlei Richtung sein werden;* was in Einklang steht mit dem Satz p. 220.

§ 10.

Die Resultanten der auf die beiden Kugeln von der Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte.

Wir haben diese Resultanten X^p und X_0^p bereits früher (p. 195—200) angegeben. Doch wird es angemessen sein, die damaligen Ergebnisse von Neuem aufzunehmen, zunächst in übersichtlicher Weise zusammenzustellen, und sodann weitere Bemerkungen daran anzuknüpfen. Das Hauptresultat der damaligen Untersuchung können wir etwa so aussprechen:

Es sei C *das Centrum, und* UCO *der von Unten nach Oben laufende vertikale Durchmesser einer fest aufgestellten Kugelfläche* σ_∞ *von unendlich grossem Radius. Innerhalb dieser Fläche befinde sich eine incompressible Flüssigkeit. Und im Innern dieser Flüssigkeit mögen sich zwei Kugeln* (etwa zwei Metallkugeln) *von den Radien* R *und* R_0 *befinden, deren Centra* c *und* c_0 *längs jenes festen Durchmessers* UCO *nach Belieben hingleiten können.*

Auf dieses materielle System mögen von Aussen her gegebene Kräfte einwirken; und zwar seien die x*-Componenten der die beiden Kugeln sollicitirenden äussern Kräfte mit* X *und* X_0, *andererseits das Potential der die Flüssigkeit sollicitirenden äussern Kräfte mit* $V = V(x, y, z)$ *bezeichnet. Dabei mag als* x*-Axe der vertikale Durchmesser* UCO, *und als* yz*-Ebene die durch* C *gelegte Horizontal-Ebene angesehen werden.*

Alsdann ergeben sich für die Bewegung der Kugeln die Differentialgleichungen:

$$(1.)\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + X^p, \qquad M_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = X_0 + X_0^p,$$

wo M und M_0 die Massen der beiden Kugeln, und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die x-Coordinaten ihrer Mittelpuncte c und c_0 vorstellen. Dabei haben X und X_0 die schon genannte Bedeutung; während X^p und X_0^p die x-Componenten derjenigen Wirkungen vorstellen, welche auf die Kugeln ausgeübt werden durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit.

Bezeichnet man den Central-Abstand (cc_0) der beiden Kugeln mit E, und denkt man sich dabei (zur Fixirung der Vorstellung) *den Punct c oberhalb c_0 gelegen, mithin:*

$$(2.)\qquad E = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \quad \textit{und} \quad \mathfrak{x} > \mathfrak{x}_0,$$

so haben die Componenten X^p und X_0^p folgende Werthe:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} X^p &= -X^j - \frac{d\mathsf{Z}}{dE}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + \frac{d(\mathsf{Z}+2\mathsf{H}+\mathsf{Z}_0)}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 - 2\left(\mathsf{Z}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}\right),\\ X_0^p &= -X_0^j + \frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \frac{d(\mathsf{Z}+2\mathsf{H}+\mathsf{Z}_0)}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 - 2\left(\mathsf{Z}_0\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} + \mathsf{H}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right), \end{aligned}$$

vgl. p. 200. *Dabei bezeichnen Z, Z_0 und H bestimmte nur von E abhängende Functionen, nämlich Ausdrücke, die ausser von E selber nur noch von den Radien R, R_0 der beiden Kugeln und von der Dichtigkeit ϱ der incompressiblen Flüssigkeit dependiren. Ueberdiess repräsentiren X^j und X_0^j die dem Princip des Archimedes entsprechenden Kräfte, nämlich die x-Componenten derjenigen Wirkungen, welche die durch das Potential $V = V(x, y, z)$ definirten äussern Kräfte auf die Kugeln ausüben würden, falls die Materien der beiden Kugeln identisch wären mit der gegebenen Flüssigkeit.*

Was jene von E abhängenden Functionen Z, Z_0 und H betrifft, so ist zu bemerken, dass die sechs Grössen:

$$(4.)\qquad \begin{matrix} \mathsf{Z}, & \mathsf{Z}_0, & (-\mathsf{H}) \\ \left(-\frac{d\mathsf{Z}}{dE}\right), & \left(-\frac{d\mathsf{Z}_0}{dE}\right), & \frac{d\mathsf{H}}{dE} \end{matrix} \qquad \text{[vgl. p. 219]}$$

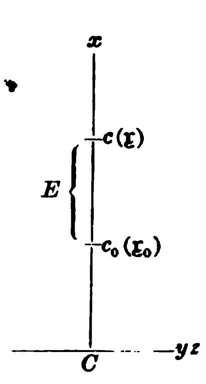
unter allen Umständen positiv sind, und dass ferner der Ausdruck

$$(5.)\qquad \frac{d(\mathsf{Z}+2\mathsf{H}+\mathsf{Z}_0)}{dE} \qquad \text{[vgl. (22.) p. 231]}$$

ebenfalls unter allen Umständen positiv ist. Will man also z. B. in der Formel für X^p (3.) *die Vorzeichen der einzelnen Glieder anschaulich machen, so hat man zu schreiben:*

$$(6.)\qquad X^p = -X^j + \alpha\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + \beta\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 - \gamma\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \delta\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2},$$

und hinzuzufügen, dass α, β, γ, δ stets positiv sind.



Wir haben somit, wie die Formel (6.) zeigt, bei der auf die Kugel c wirkenden Kraft X^p im Ganzen *fünf* Theile zu unterscheiden. Der *erste* Theil entspricht dem Princip des Archimedes. Der *zweite* Theil rührt her von $\left(\frac{dE}{dt}\right)^2$, und ist stets von solcher Beschaffenheit, als würde die Kugel von der Nebenkugel c_0 *abgestossen* (einerlei ob das $\frac{dE}{dt}$ positiv oder negativ ist). Der *dritte* Theil rührt her von $\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2$ und ist ebenfalls von solcher Beschaffenheit, als würde die Kugel von der Nebenkugel c_0 *abgestossen*.

Der *vierte* Theil rührt her von $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, und ist der Beschleunigung der betrachteten Kugel stets *entgegengesetzt* gerichtet. Der *fünfte* Theil endlich rührt her von der Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}$ der Nebenkugel, und ist stets von solcher Beschaffenheit, als würde die Kugel durch jene Beschleunigung der Nebenkugel in *gleichem* Sinne sollicitirt.

Man kann übrigens z. B. die erste der Formeln (3.) *auch so schreiben:*

$$(7.)\quad X^p = -X^j - \left[\frac{d\mathsf{Z}}{dE}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + 2\mathsf{Z}\frac{d^2E}{dt^2}\right] + \left[\frac{d\Sigma}{dE}\left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 - 2(\mathsf{Z}+\mathsf{H})\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}\right],$$

wo Σ *zur Abkürzung gesetzt ist für* $(\mathsf{Z} + 2\mathsf{H} + \mathsf{Z}_0)$. *Bei dieser Schreibweise treten im Ausdrucke der auf die Kugel c einwirkenden Kraft* X^p *der Hauptsache nach drei Glieder uns entgegen. Das erste entspricht dem Princip des Archimedes. Das zweite rührt lediglich her von der relativen Bewegung der beiden Kugeln zu einander; denn es ist nur mit* $\frac{dE}{dt}$ *und* $\frac{d^2E}{dt^2}$ *behaftet. Und das dritte Glied endlich rührt lediglich her von der Bewegung der Nebenkugel* c_0; *denn es ist nur mit* $\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}$ *und* $\frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2}$ *behaftet. Dabei mag darauf aufmerksam gemacht sein, dass jenes zweite nur von der relativen Bewegung abhängende Glied eine gewisse Analogie mit dem Weber'schen Grundgesetz zeigt.*

Führt man nämlich statt der Function $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}(E)$ für den Augenblick eine andere Function $\psi = \psi(E)$ ein, indem man setzt:

$$\mathsf{Z} = \left(\frac{d\psi}{dE}\right)^2,$$

so geht jenes zweite Glied der Formel (7.) über in:

$$2\frac{d\psi}{dE}\frac{d^2\psi}{dE^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{d\psi}{dE}\right)^2\frac{d^2E}{dt^2},$$

d. i. in

$$2\frac{d\psi}{dE}\frac{d^2\psi}{dt^2};$$

und dies würde der dynamische oder kinetische Theil des Weber'schen Gesetzes sein, falls $\psi = \sqrt{E}$ wäre; was allerdings bei der gegenwärtigen hydrodynamischen Untersuchung *nicht* der Fall ist. Und demgemäss habe ich vorhin auch nur von einer *Analogie* gesprochen, welche zwischen jenem zweiten Gliede der Formel (7.) und dem Weber'schen Gesetz stattfindet.

§ 11.

Anwendung auf den Fall, dass die beiden Kugeln weit von einander entfernt sind.

Ebenso wie früher werde zur Abkürzung gesetzt [vgl. p. 213]:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\pi\varrho}{3}}\,R^3, & B &= \sqrt{3(1-q^2)^3},\\ A_0 &= \sqrt{\frac{\pi\varrho}{3}}\,R_0^3, & B_0 &= \sqrt{3(1-q_0^2)^3}. \end{aligned}$$

Es seien nun die beiden in Bewegung begriffenen Kugeln *sehr weit* von einander entfernt, mithin q und q_0 und $f = qq_0$ *sehr kleine* Grössen [vgl. (σ.) p. 205]. Betrachtet man diese kleinen Grössen q und q_0 als von gleicher Ordnung, und vernachlässigt man die *siebenten* Potenzen derselben, so erhält man aus den Formeln p. 214 für Z, Z_0, H die Werthe:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{Z} &= A^2\left(1 + B^2\frac{1\cdot 2}{2}\frac{f^3}{1-f^3}\right) = A^2(1 + B^2f^3),\\ \mathsf{Z}_0 &= A_0^2\left(1 + B_0^2\frac{1\cdot 2}{2}\frac{f^3}{1-f^3}\right) = A_0^2(1 + B_0^2f^3),\\ \mathsf{H} &= -AA_0BB_0\frac{(\sqrt{f})^3}{(1-f^2)^3} \qquad = -AA_0BB_0(\sqrt{f})^3, \end{aligned}$$

oder, falls man für B, B_0 die Werthe (8.) substituirt:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{Z} &= \quad A^2(1+3f^3),\\ \mathsf{Z}_0 &= \quad A_0^2(1+3f^3),\\ \mathsf{H} &= -AA_0\left(3(\sqrt{f})^3 - \frac{9}{2}(q^2+q_0^2)(\sqrt{f})^3\right). \end{aligned}$$

Vernachlässigt man aber nicht die *siebenten*, sondern schon die *fünften* Potenzen von q und q_0, so erhält man:

$$(11.)\qquad \mathsf{Z} = A^2, \qquad \mathsf{Z}_0 = A_0^2, \qquad \mathsf{H} = -AA_0\cdot 3(\sqrt{f})^3.$$

Bei dieser ersten Annäherung kann nun, nach (φ.), (ψ.) p. 205, $q = \frac{1}{2}\, \varsigma = \frac{R}{E}$, mithin $q_0 = \frac{R_0}{E}$ gesetzt werden. Alsdann ergiebt sich:

$$(12.) \qquad \mathsf{Z} = A^2, \quad \mathsf{Z}_0 = A_0^2, \quad \mathsf{H} = -A A_0 \frac{3\sqrt{R^3 R_0^3}}{E^3},$$

oder, falls man für A, A_0 ihre Werthe (8.) substituirt:

$$(13.) \qquad \mathsf{Z} = \frac{\pi\varrho}{3} R^3, \qquad \mathsf{Z}_0 = \frac{\pi\varrho}{3} R_0^3, \qquad \mathsf{H} = -\pi\varrho \frac{R^3 R_0^3}{E^3}.$$

Substituirt man schliesslich diese Ausdrücke (13.) in (3.), so erhält man:

$$(14.) \qquad \begin{aligned} X^p &= -X^j + 2\pi\varrho R^3 \left[+ \frac{3R_0^3}{E^4} \left(\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}\right)^2 + \frac{R_0^3}{E^3} \frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} - \frac{1}{3} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \right], \\ X_0^p &= -X_0^j + 2\pi\varrho R_0^3 \left[- \frac{3R^3}{E^4} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \frac{R^3}{E^3} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} - \frac{1}{3} \frac{d^2\mathfrak{x}_0}{dt^2} \right]. \end{aligned}$$

Bei dem hier eingehaltenen Grade der Annäherung bestehen also die auf die Kugeln ausgeübten Druckkräfte X^p und X_0^p einerseits aus den durch das Princip des Archimedes bedingten Theilen $-X^j$ und $-X_0^j$, und andererseits aus gewissen andern Theilen, die umgekehrt proportional respective mit der *vierten*, *dritten* und *nullten* Potenz der Centraldistanz E sind.

Weitere Untersuchungen über das Hamilton'sche Princip, in seiner Anwendung auf die Probleme der Hydrodynamik.

§ 1.

Ueber gewisse in den Formeln des Hamilton'schen Princips auftretende Differenzen. Stellung einer bestimmten hydrodynamischen Aufgabe zur näheren Untersuchung dieser Differenzen.

Für die virtuelle Arbeit $\delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \ldots$, oder vielmehr für die in diesem Augenblick vorhandenen Coefficienten $L_1, L_2, \ldots$ haben wir früher [p. 63], mittelst des *Hamilton*'schen Princips, die Formeln erhalten:

$$(1.)\quad L_1 = \frac{\partial(T - 2\Theta_0 - W)}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\alpha'} + \left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\beta' + \left(\frac{\partial A}{\partial\gamma} - \frac{\partial C}{\partial\alpha}\right)\gamma' + \cdots$$

etc. etc. etc.

Lange Zeit habe ich geglaubt, dass die hier auftretenden Differenzen $\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial\gamma} - \frac{\partial C}{\partial\alpha}\right)$, etc. etc. *identisch* $= 0$ *seien*, und solches zu beweisen mich bemüht; bis ich schliesslich zu einfachen Beispielen gelangt bin, aus denen das *Gegentheil* hervorgeht. Um näher auf diese Dinge einzugehen, stellen wir uns folgende Aufgabe:

Ein starrer Körper enthalte in seinem Innern einen mehrfach zusammenhängenden und mit incompressibler Flüssigkeit erfüllten Hohlraum $\mathfrak{R}$. Die Beweglichkeit des Körpers sei eine völlig freie oder auch eine durch gegebene Bedingungen beschränkte; sodass also die augenblickliche Position des Körpers von irgend welchen Parametern α, β, ... abhängt, deren Anzahl $\overline{<}\, 6$ ist.

Auf dieses aus Körper und Flüssigkeit bestehende materielle System mögen von Aussen her gegebene Kräfte einwirken; insbesondere mag das Potential der die Flüssigkeit sollicitirenden äussern Kräfte mit $V = V(x, y, z)$ bezeichnet sein. Ueberdiess sei der Anfangszustand des starren Körpers, und ebenso der der Flüssigkeit in beliebiger Weise gegeben, jedoch letzterer als ein wirbelfreier. Dieser wirbelfreie Anfangszustand der Flüssigkeit mag gegeben sein durch Angabe der denselben charakterisirenden Constanten $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$ (p. 31).

Unter so bewandten Umständen soll die Bewegung des materiellen Systems, und ferner auch der während dieser Bewegung von der Flüssigkeit auf die Wände des Hohlraums $\mathfrak{R}$ ausgeübte Druck näher untersucht werden. In letzterer Beziehung wird namentlich die virtuelle Arbeit

(2.) $$\delta L = L_1 \delta\alpha + L_2 \delta\beta + \cdots$$

zu berechnen sein, welche die Flüssigkeit vermöge ihres Druckes auf den starren Körper ausüben *würde*, falls man denselben aus seiner augenblicklichen Position (α, β, ...) in irgend welche willkührlich gewählte Nachbarposition ($\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$, ...) überführen wollte. Und bei Berechnung dieser Arbeit δL wird zu verfahren sein nach Vorschrift unserer allgemeinen Regeln § 16, p. 61—63.

§ 2.

Behandlung der gestellten Aufgabe.

Führt man ausser dem *absolut festen* Axensystem (x, y, z) noch ein zweites Axensystem (ξ, η, ζ) ein, welches mit dem gegebenen Körper starr verbunden ist, und bezeichnet man für irgend ein Molecül dieses starren Körpers die Coordinaten in jenen beiderlei Systemen respective mit x, y, z und ξ, η, ζ, so finden die Relationen statt:

(3.) $$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{a} + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_3 z, \\ \eta &= \mathfrak{b} + \mathfrak{B}_1 x + \mathfrak{B}_2 y + \mathfrak{B}_3 z, \\ \zeta &= \mathfrak{c} + \mathfrak{C}_1 x + \mathfrak{C}_2 y + \mathfrak{C}_3 z, \end{aligned}$$

deren Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *gegebene* Functionen der Parameter α, β, ... sind, während die α, β, ... ihrerseits *unbekannte* Functionen der Zeit sind. Dies vorangeschickt, haben wir nun zuvörderst das *Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit:*

(4.) $$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \alpha' + \Phi_2 \beta' + \cdots \qquad \text{[vgl. p. 62]}$$

in Betracht zu ziehen. Die zur Bestimmung von Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... dienenden Bedingungen (B_0.), (B_1.), (B_1.), ... [p. 39], gelten zunächst nur für das absolut feste Axensystem (x, y, z), lassen sich aber leicht auf das mit dem Körper verbundene Axensystem (ξ, η, ζ) übertragen, und lauten alsdann folgendermassen:

(B_0.) Φ_0 soll in den Querschnitten des Hohlraumes $\mathfrak{R}$ mit den gegebenen constanten Werthdifferenzen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... behaftet, hiervon abgesehen aber im Raume $\mathfrak{R}$ stetig sein,

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}, \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}, \frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta} \textit{ stetig}, \text{ und } \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta^2} = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R},$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial N} = 0, \text{ an der Oberfläche von } \mathfrak{R};$$

ferner was Φ_1 betrifft:

$$(B_1.)\quad \begin{cases} \Phi_1 \textit{ stetig} \text{ im Raume } \mathfrak{R}, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \textit{ stetig}, \text{ und } \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} = 0, \text{ im Raume } \mathfrak{R}, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial N} = A, \text{ an der Oberfläche von } \mathfrak{R}; \end{cases}$$

U. s. w. U. s. w. Die letzte der Bedingungen $(B_2.)$ wird z. B. lauten: $\frac{\partial \Phi_2}{\partial N} = B$, die letzte der Bedingungzn $(B_3.)$: $\frac{\partial \Phi_3}{\partial N} = \Gamma$, u. s. w. Diese Grössen $A, B, \Gamma, \ldots$ sind für jedes Oberflächenelement des Hohlraumes $\mathfrak{R}$ *bestimmte* Functionen der Parameter $\alpha, \beta, \ldots.$ [vgl. (6.) p. 8], während gleichzeitig N die der Flüssigkeit *abgewendete* Normale des Oberflächenelementes repräsentirt.

Während also die Bedingungen $(B_0.)$ von den $\alpha, \beta, \ldots$ *völlig frei* sind, zeigen sich die weiter folgenden Bedingungen $(B_1.)$, $(B_2.)$, ... durchweg mit den $\alpha, \beta, \ldots.$ *behaftet.* Und demgemäss erhält man also für Φ_0 einen von $\alpha, \beta, \ldots$ *unabhängigen* Werth:

$$(5.)\qquad \Phi_0 = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta),$$

hingegen für $\Phi_1, \Phi_2, \ldots.$ Werthe, die ausser von ξ, η, ζ *auch noch von den* $\alpha, \beta, \ldots$ *abhängen*:

$$(5.\,a)\qquad \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \ldots.), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \ldots.), \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Diese Formeln (5.), (5. a) *können indessen leicht zu Missverständnissen und Fehlern hinleiten,* sobald man auf dieselben die Regeln des schon citirten § 16 p. 61 in Anwendung bringt. Bei jenen Regeln sind nämlich als rechtwinklige Coordinaten stets solche vorausgesetzt, die sich auf ein *absolut festes* Axensystem beziehen. Will man also jene Regeln auf $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots.$ anwenden, so wird es unter Umständen nothwendig sein, zuerst die ξ, η, ζ mittelst der Relationen (3.) durch die x, y, z zu ersetzen. Alsdann aber erhält man z. B. für Φ_0 (5.) einen Ausdruck:

$$(6.)\quad \Phi_0 = \Phi_0(\mathfrak{a} + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_3 z,\ \ \mathfrak{b} + \mathfrak{B}_1 x + \cdots,\ \ \mathfrak{c} + \mathfrak{C}_1 x + \ldots),$$

der mit den $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und folglich auch mit den $\alpha, \beta, \ldots$ behaftet ist [denn jene $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind ja gegebene Functionen der $\alpha, \beta, \ldots$]. Will man also, *im Sinne der genannten Regeln,* z. B. die Ableitungen $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}, \ldots$ bilden, welche erforderlich sind zur Berech-

nung der A, B, ... in (4.) p. 62], so hat man, wie aus (5.) und (6.) folgt, zu schreiben:

$$(7.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

wo alsdann z. B. die Ableitungen von ξ, η, ζ nach α, zufolge (3.), die Werthe haben:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial \alpha}x + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial \alpha}y + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial \alpha}z, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial \alpha}x + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial \alpha}y + \frac{\partial \mathfrak{B}_3}{\partial \alpha}z, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial \alpha}x + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial \alpha}y + \frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial \alpha}z. \end{aligned}$$

Diese Formeln (8.) lassen sich in bekannter Weise umgestalten. Nach (3.) ist nämlich:

$$(9.)\quad \begin{aligned} x &= \mathfrak{A}_1(\xi - \mathfrak{a}) + \mathfrak{B}_1(\eta - \mathfrak{b}) + \mathfrak{C}_1(\zeta - \mathfrak{c}), \\ y &= \mathfrak{A}_2(\xi - \mathfrak{a}) + \mathfrak{B}_2(\eta - \mathfrak{b}) + \mathfrak{C}_2(\zeta - \mathfrak{c}), \\ z &= \mathfrak{A}_3(\xi - \mathfrak{a}) + \mathfrak{B}_3(\eta - \mathfrak{b}) + \mathfrak{C}_3(\zeta - \mathfrak{c}). \end{aligned}$$

Substituirt man aber diese Werthe (9.) in die *erste* der Gleichungen (8.), so folgt:

$$(10.)\quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} + (\xi - \mathfrak{a})\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} + (\eta - \mathfrak{b})\sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} + (\zeta - \mathfrak{c})\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha},$$

die Summationen ausgedehnt über $j = 1, 2, 3$. Nun ist bekanntlich:

$$(11.)\quad \sum \mathfrak{A}_j^2 = 1, \qquad \sum \mathfrak{B}_j \mathfrak{C}_j = 0$$

etc. etc. etc. etc.

mithin:

$$(12.\text{ a})\quad \begin{aligned} &\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha} = -\sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{U}_\alpha, \\ &\sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha} = 0, \qquad\quad \sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha} = -\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{V}_\alpha, \\ &\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha} = 0, \qquad\quad \sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} = -\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{W}_\alpha, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{U}_\alpha$, $\mathfrak{V}_\alpha$, $\mathfrak{W}_\alpha$ als Abbreviaturen für die angegebenen Ausdrücke dienen sollen. Substituirt man diese Werthe (12. a) in die Formel (10.), und setzt man dabei zur weiteren Abkürzung:

$$(12.\,b)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} - \mathfrak{b}\mathfrak{W}_\alpha + \mathfrak{c}\mathfrak{V}_\alpha &= \mathfrak{u}_\alpha, \\ \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha} - \mathfrak{c}\mathfrak{U}_\alpha + \mathfrak{a}\mathfrak{W}_\alpha &= \mathfrak{v}_\alpha \\ \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha} - \mathfrak{a}\mathfrak{V}_\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{U}_\alpha &= \mathfrak{w}_\alpha, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} &= \mathfrak{u}_\alpha + \eta\mathfrak{W}_\alpha - \zeta\mathfrak{V}_\alpha, \quad \text{und in ähnlicher Weise:} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} &= \mathfrak{v}_\alpha + \zeta\mathfrak{U}_\alpha - \xi\mathfrak{W}_\alpha, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} &= \mathfrak{w}_\alpha + \xi\mathfrak{V}_\alpha - \eta\mathfrak{U}_\alpha; \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, *dass alle deutschen Buchstaben* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, *ebenso wie* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *gegebene Functionen der Parameter* α, β, ... *vorstellen.*

Substituirt man schliesslich die Werthe (13.) in (7.) so erhält man:

$$(14.\,a)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} = &\left[\mathfrak{u}_\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \mathfrak{v}_\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \mathfrak{w}_\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right] \\ &+ \left[\mathfrak{U}_\alpha\left(\zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right) + \mathfrak{V}_\alpha\left(\xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\right) + \mathfrak{W}_\alpha\left(\eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}\right)\right]; \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise:

$$(14.\,b)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} = &\left[\mathfrak{u}_\beta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \mathfrak{v}_\beta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \mathfrak{w}_\beta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right] \\ &+ \left[\mathfrak{U}_\beta \left(\zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right) + \cdots\cdots\right]. \end{aligned}$$

U. s. w. U. s. w. Dabei repräsentiren z. B. $\mathfrak{U}_\beta$, $\mathfrak{V}_\beta$, $\mathfrak{W}_\beta$, $\mathfrak{u}_\beta$, $\mathfrak{v}_\beta$, $\mathfrak{w}_\beta$ diejenigen Ausdrücke, in welche die durch die Formeln (12. a, b) definirten Grössen $\mathfrak{U}_\alpha$, $\mathfrak{V}_\alpha$, $\mathfrak{W}_\alpha$, $\mathfrak{u}_\alpha$, $\mathfrak{v}_\alpha$, $\mathfrak{w}_\alpha$ sich verwandeln, sobald man in jenen Formeln durchweg die Buchstaben α mit β vertauscht.

Denkt man sich die Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... und die soeben besprochenen Ableitungen von Φ_0 wirklich berechnet, so sind nun weiter, nach Vorschrift des citirten § 16, p. 61, die daselbst mit A, B, C, ..., Θ_0, Θ_{jk} bezeichneten Grössen zu bilden:

$$(15.)\qquad \begin{aligned} A &= \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}\, d\xi d\eta d\zeta, \\ B &= \varrho \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta}\, d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

etc. etc.

und ferner:

$$(16.)\quad \begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\right)^2\right] d\xi d\eta d\zeta, \\ \Theta_{jk} &= \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_k}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_k}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta}\right] d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $d\xi d\eta d\zeta$ des Hohlraumes $\mathfrak{R}$. Dabei sind, was die Formeln (16.) betrifft, absichtlich statt der x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ eingeführt, was mittelst der Relationen (3.) leicht zu bewerkstelligen war.

Die Function Φ_0 kann in doppelter Weise dargestellt werden, nämlich entweder als Function von ξ, η, ζ (5.), oder als Function von x, y, z (6.). In letzterer Weise dargestellt, ist sie, ausser von x, y, z, auch noch abhängig von den $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, d. i. von den α, β, ... In *ersterer* Weise dargestellt, ist sie hingegen *lediglich abhängig von den* ξ, η, ζ, *und unabhängig von den* α, β, ... Denkt man sich also in dem Θ_0 (16.) jenen *ersteren* Werth (5.) substituirt, und sodann über alle Volumelemente $d\xi d\eta d\zeta$ des mit dem Axensystem (ξ, η, ζ) starr verbundenen Raumes $\mathfrak{R}$ die Integration ausgeführt, so erhält man für Θ_0 einen *von* α, β, ... *unabhängigen* Werth. Somit ergiebt sich, dass Θ_0 einen *constanten* Werth besitzt:

$$(17.)\qquad \Theta_0 = \text{Const.} = H_0,$$

der lediglich abhängen kann von der Gestalt und Grösse des Raumes $\mathfrak{R}$, ferner von der Lage des mit $\mathfrak{R}$ starr verbundenen Axensystems (ξ, η, ζ), und überdiess noch von den bei der Bestimmung von Φ_0 mit in Betracht kommenden gegebenen Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ ... [vgl. die Bedingungen (B_0.) p. 238]. — Andererseits aber ergeben sich für die Θ_{jk} (16.) durch Substitution der Φ_j, Φ_k (5. a) Werthe, die *wesentlich von den* α, β, ... *abhängig sind;* was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(18.)\qquad \Theta_{jk} = \Theta_{jk}(\alpha, \beta, \ldots).$$

Was endlich die A, B, C, ... betrifft, so erhält man aus (15.) durch Substitution des Werthes (14. a):

$$(19.)\quad \begin{aligned} A = \varrho\Big[\mathfrak{u}_\alpha \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} d\xi d\eta d\zeta + \mathfrak{v}_\alpha \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta} d\xi d\eta d\zeta + \mathfrak{w}_\alpha \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta} d\xi d\eta d\zeta\Big] \\ + \varrho\Big[\mathfrak{U}_\alpha \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\zeta\frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\right) d\xi d\eta d\zeta + \cdots\cdots\Big]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich, mit Rücksicht auf die der Function Φ_0 auferlegten Bedingungen (B_0.) p. 238, noch bedeutend vereinfachen.

Repräsentirt nämlich F irgend eine Function zweiten Grades von ξ, η, ζ mit *constanten* Coefficienten:

$$(\alpha.) \qquad F = a + (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta) + \tfrac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta \cdots),$$

und setzt man fest, dass

$$(\beta.) \qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

sein solle, so wird F der Gleichung Genüge leisten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0,$$

während gleichzeitig

$$F, \frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}, \frac{\partial F}{\partial \zeta}$$

überall *stetig* sind. Beachtet man nun überdiess jene der Function Φ_0 auferlegten Bedingungen (B_0.), so ergiebt sich auf Grund eines früheren Satzes (ζ.) p. 42 sofort:

$$(\gamma.) \iiint_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right] d\xi d\eta d\zeta = \iint_{\mathfrak{K}} F \frac{\partial \Phi_0}{\partial N} d\sigma = 0.$$

In der That ist nämlich $\frac{\partial \Phi_0}{\partial N}$, zufolge der Bedingungen (B_0.), an der Oberfläche σ des Hohlraumes $\mathfrak{K}$ überall $= 0$, mithin das in (γ.) auf der rechten Seite stehende Oberflächenintegral ebenfalls $= 0$. Diese Formel (γ.) nimmt nun, falls man für F seinen Werth (α.) einsetzt, die Gestalt an:

$$(\delta.) \qquad \iiint_{\mathfrak{K}} \left[(a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + (a_2 + a_{21}\xi + \cdots)\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \cdots\right] d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

Diese Formel (δ.) aber muss stattfinden für *beliebige* Werthe der a's, falls nur dieselben der Relation (β.) entsprechen. Demgemäss ergeben sich aus (δ.) die specielleren Formeln:

$$(\varepsilon.) \quad \begin{cases} \iiint_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta = 0, \quad \iiint_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta = 0, \quad \text{etc.,} \\ \iiint_{\mathfrak{K}} \left(\zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right) d\xi d\eta d\zeta = 0, \quad \text{etc. etc.} \end{cases}$$

und ferner die Formeln:

$$(\zeta.) \quad \iiint_{\mathfrak{K}} \xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{\mathfrak{K}} \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{\mathfrak{K}} \zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta.$$

Mittelst dieser Formeln (ε.), (ζ.) reducirt sich der für A erhaltene Ausdruck (19.) auf die einfachere Gestalt:

$$(20.) \quad A = 2\varrho\left[\mathfrak{U}_a \iiint_{\mathfrak{K}} \zeta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta + \mathfrak{V}_a \iiint_{\mathfrak{K}} \xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta + \cdots\right].$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$
(21.)\qquad
\begin{aligned}
2\varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \zeta\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}\,d\xi d\eta d\zeta &= h',\\
2\varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \xi\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\,d\xi d\eta d\zeta &= h'',\\
2\varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \eta\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\,d\xi d\eta d\zeta &= h''',
\end{aligned}
$$

wo alsdann h', h'', h''' [ebenso wie H_0 (17.)] *vom Anfangszustande der Flüssigkeit, nämlich von $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... abhängende Constanten* sein werden, so erhält man:

$$
(22.\ a)\qquad A = h'\mathfrak{U} \;+ h''\mathfrak{B}_\alpha + h'''\mathfrak{W}_\alpha,
$$

und in ähnlicher Weise:

$$
(22.\ b)\qquad B = h'\mathfrak{U}_\beta + h''\mathfrak{B}_\beta + h'''\mathfrak{W}_\beta,
$$

u. s. w. u. s. w. Da h', h'', h''' *Constante* sind, so erhält man aus (22. a, b) sofort die erste Formel des folgenden Systems:

$$
(23.)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha} &= h'\Big(\frac{\partial\mathfrak{U}_\alpha}{\partial\beta}-\frac{\partial\mathfrak{U}_\beta}{\partial\alpha}\Big)+h''\Big(\frac{\partial\mathfrak{B}_\alpha}{\partial\beta}-\frac{\partial\mathfrak{B}_\beta}{\partial\alpha}\Big)+h'''\Big(\frac{\partial\mathfrak{W}_\alpha}{\partial\beta}-\frac{\partial\mathfrak{W}_\beta}{\partial\alpha}\Big),\\
\frac{\partial A}{\partial\gamma}-\frac{\partial C}{\partial\alpha} &= h'\Big(\frac{\partial\mathfrak{U}_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\mathfrak{U}_\gamma}{\partial\alpha}\Big)+h''\Big(\frac{\partial\mathfrak{B}_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\mathfrak{B}_\gamma}{\partial\alpha}\Big)+h'''\Big(\frac{\partial\mathfrak{W}_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\mathfrak{W}_\gamma}{\partial\alpha}\Big),
\end{aligned}
$$

etc. etc. etc.

dessen übrige Formeln sich in analoger Weise ergeben. Hiemit aber sind die in (1.) p. 237 als Coefficienten auftretenden Differenzen $\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial\gamma}-\frac{\partial C}{\partial\alpha}\right)$, etc. etc. in eine für die wirkliche Berechnung bequeme Gestalt versetzt. Und mittelst dieser Formeln (23.) lässt sich z. B. auch leicht nachweisen, dass die genannten Differenzen im Allgemeinen *nicht* $= 0$ sind; wie im folgenden § gezeigt werden soll.

§ 3.

Fortsetzung. Uebergang zu einem specielleren Fall.

Der in dem sich bewegenden starren Körper vorhandene Hohlraum $\mathfrak{R}$ habe eine ringförmige Gestalt, es sei nämlich die Begrenzungsfläche dieses Raumes $\mathfrak{R}$ eine *ringförmige Rotationsfläche von beliebigem Querschnitt.* Alsdann ist $\mathfrak{R}$ *zweifach* zusammenhängend; sodass also die zur Bestimmung des (wirbelfreien) Anfangszustandes der Flüssigkeit erforderlichen Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... in diesem Fall sich auf nur *eine*, etwa auf $\varkappa$ reduciren.

Nimmt man nun zur ζ-Axe die geometrische Axe des ringförmigen Raumes $\mathfrak{R}$, und lässt man die $\xi\eta$-Ebene durch irgend einen bestimmten

Punct dieser Axe hindurchgehen; so kann die den Bedingungen (B_0.) p. 238 entsprechende Function Φ_0 sofort angegeben werden. Auf Grund früherer Betrachtungen erhält man nämlich in diesem Fall:

$$\Phi_0 = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\varkappa}{2\pi} \vartheta \text{*)}. \tag{24.}$$

Hier bezeichnet $\varkappa$ die soeben genannte Constante, während ϑ das Azimuth der durch den Punct (ξ, η, ζ) gehenden Meridianebene gegen die $\xi\zeta$-Ebene vorstellt. Demgemäss ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} &= -\frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} &= +\frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} &= 0, \qquad \text{[vgl. (β.) p. 34].} \end{aligned} \tag{25.}$$

Somit ergeben sich aus (21.) für die Constanten h', h'', h''' im gegenwärtigen Fall die Werthe:

$$\begin{aligned} h' &= +\frac{\varkappa\varrho}{\pi} \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\xi\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\xi^2 + \eta^2}, \\ h'' &= 0, \\ h''' &= -\frac{\varkappa\varrho}{\pi} \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\eta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned} \tag{26.}$$

Der Raum $\mathfrak{R}$ ist aber in Bezug auf die Meridianebene $\eta\zeta$ symmetrisch, also nach (26.):

$$h' = 0. \tag{26. a}$$

Substituirt man jetzt die Werthe (26.), (26. a) in (23.), so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= h''' \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathfrak{W}_\beta}{\partial \alpha} \right), \\ \frac{\partial A}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \alpha} &= h''' \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \mathfrak{W}_\gamma}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \tag{27.}$$

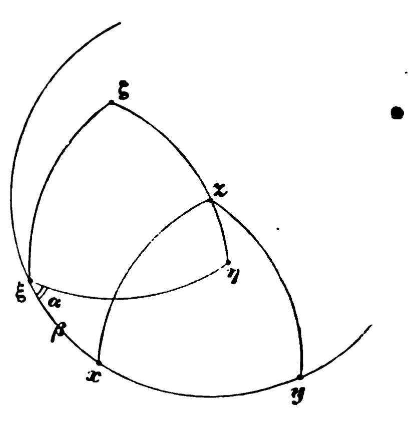
etc. etc. etc.

wo das h''' den in (26.) angegebenen Werth hat, also eine *nichtverschwindende* Constante vorstellt.

Unsere Hauptabsicht bei diesen Untersuchungen bestand darin, zu zeigen, dass die Differenzen $\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)$, *etc. etc. nicht nothwendig* $= 0$ *zu sein brauchen.* Da nun die Constante h''' von 0 verschieden ist, so bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass die in (27.) in Parenthese stehenden Ausdrücke ebenfalls von 0 verschieden sein können.

*) Vgl. (ε.) p. 34. Das dort noch hinzugefügte, nur von der Zeit abhängende Glied $h(t)$ ist, der Bequemlichkeit willen, hier fortgelassen.

Zu diesem Zweck wollen wir den hier betrachteten Fall einer weiteren Specialisirung unterwerfen. Es sei nämlich der Anfangspunct des Systems (ξ, η, ζ) *fest*, und identisch mit dem des Systemes (x, y, z). Ueberdiess sei die ξ-Axe gezwungen in der *festen* xy-Ebene zu bleiben, während der Körper selber um die ξ-Axe drehbar ist. Wir bezeichnen den Drehungswinkel des Körpers um die ξ-Axe mit α, ferner den augenblicklichen Neigungswinkel dieser ξ-Axe gegen die *feste* x-Axe mit β; wie solches näher angegeben ist in der beistehenden Figur, die gezeichnet zu denken ist auf einer um den gemeinschaftlichen Anfangspunct der Coordinatensysteme (x, y, z) und (ζ, η, ζ) mit dem Radius Eins beschriebenen Kugelfläche.



Nach (3.) p. 238 sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ die Richtungscosinus der Axe ξ gegen die festen Axen x, y, z. U. s. w. Demgemäss ergeben sich die Formeln:

$$(28.)\quad \begin{array}{lll} \mathfrak{A}_1=\cos(\xi,x)=\cos\beta, & \mathfrak{B}_1=\cos(\eta,x)=\cos\alpha\sin\beta, & \mathfrak{C}_1=\cos(\zeta,x)=-\sin\alpha\sin\beta \\ \mathfrak{A}_2=\cos(\xi,y)=-\sin\beta, & \mathfrak{B}_2=\cos(\eta,y)=\cos\alpha\cos\beta, & \mathfrak{C}_2=\cos(\zeta,y)=-\sin\alpha\cos\beta \\ \mathfrak{A}_3=\cos(\xi,z)=0, & \mathfrak{B}_3=\cos(\eta,z)=\sin\alpha, & \mathfrak{C}_3=\cos(\zeta,z)=\cos\alpha. \end{array}$$

In der That können von diesen neun Formeln die *acht ersten* entweder direct oder mit Hülfe sich leicht darbietender sphärischer Dreiecke aus der beistehenden Figur abgelesen werden. Und die *letzte* (für $\mathfrak{C}_3$ geltende) Formel ergiebt sich sofort, falls man nur beachtet, dass der Winkel (ζ, z) identisch ist mit dem gegenseitigen Neigungswinkel der beiden Ebenen $\xi\eta$ und xy. Aus diesen Formeln (28.) erhält man nun durch Differentiation nach α, β:

$$(29.)\quad \begin{array}{ll} \sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha} = +1, & \sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \beta} = 0, \\ \sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha} = 0, & \sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \beta} = -\sin\alpha, \\ \sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} = 0, & \sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \beta} = -\cos\alpha; \end{array}$$

demgemäss ist nach (12. a):

$$(30.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_\alpha = +1, \\ \mathfrak{V}_\alpha = 0, \\ \mathfrak{W}_\alpha = 0, \end{array} \right. \qquad \text{und ferner:} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_\beta = 0, \\ \mathfrak{V}_\beta = -\sin\alpha, \\ \mathfrak{W}_\beta = -\cos\alpha; \end{array} \right.$$

und hieraus folgt sofort:

$$(31.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathfrak{W}_\beta}{\partial \alpha} = - \sin \alpha.$$

Somit folgt schliesslich aus (27.):

$$(32.)\qquad \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} = - h''' \sin \alpha;$$

womit in evidenter Weise dargethan ist, dass die Differenz $\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)$ *im vorliegenden Fall* n i c h t $= 0$ *ist. Q. e. d.*

§ 4.

Wiederaufnahme der allgemeinen Untersuchung; wobei allerdings, der Einfachheit willen, von Neuem eine gewisse Specialisirung vorgenommen werden wird.

Wir kehren zurück zu der auf p. 237 genannten allgemeinen Aufgabe. Doch wollen wir bei Behandlung derselben folgende specielleren Annahmen eintreten lassen:

Erstens: der gegebene Körper sei drehbar um einen festen Punct o. Und dieser Punct o mag als Anfangspunct dienen sowohl für das absolut feste Axensystem (x, y, z), wie auch für das mit dem Körper verbundene Axensystem (ξ, η, ζ). Die augenblickliche Position des Körpers wird alsdann im Ganzen nur von *drei* Parametern abhängen, etwa von drei Winkeln α, β, γ.

Zweitens: Die Massenvertheilung des gegebenen starren Körpers sei symmetrisch in Bezug auf jede der drei Coordinatenebenen $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ *und* $\xi\eta$. Gleiches gilt alsdann selbstverständlich auch von der Oberfläche des Körpers, und ebenso von der Begrenzungsfläche seines innern Hohlraumes*). Auch folgt aus der genannten Symmetrie, dass die Axen ξ, η, ζ die *Hauptaxen des Körpers*, und ihr Anfangspunct o der *Schwerpunct des Körpers* sein werden.

Drittens: Von Aussen her mögen keinerlei Kräfte einwirken, weder auf den Körper selber, noch auch auf die in seinem Innern enthaltene incompressible Flüssigkeit.

Das betrachtete materielle System besteht aus zwei Theilen, nämlich aus dem *starren Körper* $\mathfrak{K}$, und der innerhalb $\mathfrak{K}$ vorhandenen *incompressiblen Flüssigkeit.* Und wir können, falls es uns beliebt, die allgemeinen Bewegungs-Gleichungen für jeden dieser beiden Theile *einzeln* aufstellen. Da äussere Kräfte auf das System nicht einwirken sollen, mithin alle auf $\mathfrak{K}$ influirenden Kräfte dargestellt sind durch

*) Dieser Hohlraum soll nach wie vor ein *mehrfach* zusammenhängender sein.

den Druck der Flüssigkeit, so erhalten wir [nach den seit *Hamilton* und *Jacobi* bekannten allgemeinen Sätzen] *für die Bewegung des Körpers* $\mathfrak{K}$ die Formel:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathfrak{T} + \delta L)\, dt = 0, \tag{33.}$$

wo $\mathfrak{T}$ die lebendige Kraft des Körpers $\mathfrak{K}$ vorstellt, während δL die virtuelle Arbeit der auf denselben von der Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte bezeichnet.

Andererseits ergiebt sich für *die Bewegung der Flüssigkeit* [zufolge der von uns entwickelten Sätze p. 61—63] die complicirtere Formel:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta f - \delta L)\, dt = 0, \qquad \text{[vgl. (8.) p. 63]}, \tag{34.}$$

wo δL dieselbe Bedeutung hat wie in (33.), während f den Ausdruck vorstellt:

$$f = T - 2\Theta_0 - [A\alpha' + B\beta' + C\gamma'], \qquad \text{[vgl. (9.) p. 63]}. \tag{35.}$$

Und hier bezeichnet z. B. das T die lebendige Kraft der Flüssigkeit; mithin ist:

$$T = \Theta_0 + [\Theta_{11}\alpha'^2 + 2\Theta_{12}\alpha'\beta' + \cdots + \Theta_{33}\gamma'^2], \qquad \text{[vgl. (6.) p. 62]}. \tag{36.}$$

Durch Addition von (33.), (34.) folgt sofort:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta f + \delta \mathfrak{T})\, dt = 0, \tag{37.}$$

eine Formel, welche das eigentliche Fundament unserer weiteren Untersuchung bilden wird. Um diese Formel (37.) *aber wirklich brauchen zu können, müssen zunächst die in* f (35.) *und in* T (36.) *enthaltenen Grössen* A, B, C, Θ_0, Θ_{jk}, *ihrem analytischen Ausdruck nach, näher untersucht werden.*

Die früheren Formeln (3.) nehmen offenbar im gegenwärtigen Fall, wo der Körper nur um den *festen* Punct o drehbar ist, die einfachere Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\xi &= \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_3 z, \qquad & x &= \mathfrak{A}_1 \xi + \mathfrak{B}_1 \eta + \mathfrak{C}_1 \zeta,\\
\eta &= \mathfrak{B}_1 x + \mathfrak{B}_2 y + \mathfrak{B}_3 z, & y &= \mathfrak{A}_2 \xi + \mathfrak{B}_2 \eta + \mathfrak{C}_2 \zeta,\\
\zeta &= \mathfrak{C}_1 x + \mathfrak{C}_2 y + \mathfrak{C}_3 z, & z &= \mathfrak{A}_3 \xi + \mathfrak{B}_3 \eta + \mathfrak{C}_3 \zeta,
\end{aligned} \tag{38.}$$

wo die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gegebene Functionen von α, β, γ sind. Gleichzeitig mag, ebenso wie damals [vgl. (12. a)], gesetzt werden:

$$\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{U}_\alpha, \quad \sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \beta} = \mathfrak{U}_\beta, \quad \sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \gamma} = \mathfrak{U}_\gamma,$$

$$(39.) \qquad \sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{B}_\alpha, \qquad \text{etc. etc.} \qquad \text{etc. etc.}$$

$$\sum \mathfrak{B}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha} = \mathfrak{W}_\alpha .$$

Bezeichnet man nun mit *Euler* die sogenannten Drehungen des starren Körpers um seine Hauptaxen ξ, η, ζ respective mit p, q, r, so ist z. B. $p = \sum \mathfrak{C}_j \frac{d\mathfrak{B}_j}{dt}$, d. i.

$$p = \left(\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha}\right)\alpha' + \left(\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \beta}\right)\beta' + \left(\sum \mathfrak{C}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \gamma}\right)\gamma',$$

also mit Rücksicht auf (39.):

$$p = \mathfrak{U}_\alpha \alpha' + \mathfrak{U}_\beta \beta' + \mathfrak{U}_\gamma \gamma', \quad \text{und ebenso:}$$

$$(40.) \qquad q = \mathfrak{B}_\alpha \alpha' + \mathfrak{B}_\beta \beta' + \mathfrak{B}_\gamma \gamma',$$

$$r = \mathfrak{W}_\alpha \alpha' + \mathfrak{W}_\beta \beta' + \mathfrak{W}_\gamma \gamma'.$$

Ferner erhalten wir für die in (34.), (35.) enthaltenen Grössen Θ_0, A, A, C die Werthe:

$$(41.) \qquad \Theta_0 = \text{Const.} = H_0, \qquad \text{[vgl. (17.) p. 242]},$$

$$A = h'\mathfrak{U}_\alpha + h''\mathfrak{B}_\alpha + h'''\mathfrak{W}_\alpha, \qquad \text{[vgl. (22. a, b) p. 244]},$$

$$(42.) \qquad B = h'\mathfrak{U}_\beta + h''\mathfrak{B}_\beta + h'''\mathfrak{W}_\beta,$$

$$C = h'\mathfrak{U}_\gamma + h''\mathfrak{B}_\gamma + h'''\mathfrak{W}_\gamma,$$

woraus mit Rücksicht auf (40.) sich ergiebt:

$$(43.) \qquad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = h'p + h''q + h'''r.$$

Dabei bezeichnen H_0 und h', h'', h''' gewisse *Constanten*, die theils von der Form des starren Körpers, oder vielmehr von der Form seines innern Hohlraumes, theils von dem Anfangszustande der Flüssigkeit (nämlich von $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ...) abhängen.

Es bleibt noch übrig, die Werthe der in (36.) vorhandenen Coefficienten Θ_{11}, Θ_{12}, ... zu berechnen. Wir beginnen mit Θ_{12}, welches definirt ist durch die Formel:

$$(44.) \; \Theta_{12} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz, \; \text{[vgl. (5.) p. 62]},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ des Hohlraumes $\mathfrak{R}$. Dabei sind unter Φ_1 und Φ_2 gewisse von ξ, η, ζ,

α, β, γ abhängende Functionen zu verstehen [vgl. (5. a) p. 239]. Demgemäss erhält man mit Rücksicht auf (38.):

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\mathfrak{A}_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}\mathfrak{B}_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}\mathfrak{C}_1, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}\mathfrak{A}_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta}\mathfrak{B}_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta}\mathfrak{C}_1$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = \text{etc. etc.} \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = \text{etc. etc.}$$

mithin:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta};$$

sodass also die Formel (44.) auch so geschrieben werden kann:

$$\Theta_{12} = \frac{\varrho}{2}\iiint_{\mathfrak{R}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta}\right]d\xi d\eta d\zeta.$$

Die Function Φ_1 war aber definirt durch die Bedingungen:

$$(\mathrm{B}_1.)\begin{cases} \Phi_1 \textit{ stetig im Raume } \mathfrak{R}, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} \textit{ stetig und } \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta^2} = 0, \textit{ im Raume } \mathfrak{R}, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathsf{N}} = \mathsf{A}, \textit{ an der Oberfläche von } \mathfrak{R}; \text{ [vgl. (B}_1.) \text{ p. 239].} \end{cases}$$

Um die Bedeutung des hier auftretenden A anzugeben, hat man irgend ein Flächenelement $d\sigma$ der den Hohlraum begrenzenden Fläche σ, oder (was dasselbe) irgend ein in $d\sigma$ gelegenes *Molecül μ des starren Körpers* zu markiren, und die Coordinaten dieses Elementes $d\sigma$ oder Molecüls μ in Bezug auf das *absolut feste* Axensystem mit (x, y, z) zu bezeichnen. Alsdann ist:

$$(\alpha.) \qquad \mathsf{A} = \frac{\partial x}{\partial\alpha}\cos(\mathsf{N}, x) + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\cos(\mathsf{N}, y) + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\cos(\mathsf{N}, z), \quad \text{[vgl. (5.) p. 7*)].}$$

Bezeichnet man die Coordinaten dieses selben Elementes $d\sigma$ oder Molecüls μ in Bezug auf das in Bewegung begriffene Hauptaxensystem des Körpers mit ξ, η, ζ, so sind ξ, η, ζ *Constante*; und gleichzeitig ist alsdann nach (38.):

$$(\beta.) \qquad x = \mathfrak{A}_1\xi + \mathfrak{B}_1\eta + \mathfrak{C}_1\zeta, \quad \text{etc. etc.}$$

Hieraus aber folgt, weil ξ, η, ζ *Constante* sind, sofort:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\partial x}{\partial\alpha} = \frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial\alpha}\xi + \frac{\partial\mathfrak{B}_1}{\partial\alpha}\eta + \frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial\alpha}\zeta, \quad \text{etc. etc.}$$

*) Die hier mit x, y, z bezeichneten Coordinaten sind damals ξ, η, ζ genannt worden.

Ueberdiess ist, was die der Flüssigkeit abgewendete Normale N des Elementes $d\sigma$ betrifft:

$$\cos(\mathsf{N}, x) = \cos(x, \xi)\cos(\mathsf{N}, \xi) + \cos(x, \eta)\cos(\mathsf{N}, \eta) + \text{etc.},$$

also mit Rücksicht auf (β.):

$$(\delta.)\quad \cos(\mathsf{N}, x) = \mathfrak{A}_1 \cos(\mathsf{N}, \xi) + \mathfrak{B}_1 \cos(\mathsf{N}, \eta) + \mathfrak{C}_1 \cos(\mathsf{N}, \zeta),$$
$$\text{etc. etc.}$$

Multiplicirt man aber die beiden Formelsysteme (γ.), (δ.) miteinander, und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (α.):

$$(\varepsilon.)\quad \mathsf{A} = \left[\left(\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial \alpha}\right)\xi + \left(\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{B}_j}{\partial \alpha}\right)\eta + \left(\sum \mathfrak{A}_j \frac{\partial \mathfrak{C}_j}{\partial \alpha}\right)\zeta\right]\cos(\mathsf{N}, \xi)$$
$$+ \text{etc. etc. etc.}$$

Die *erste* der hier auftretenden Summen ist offenbar $= 0$ [vgl. (11.) p. 240]; während die *beiden andern* die in (39.) angegebenen Bezeichnungen erhalten haben. Somit folgt:

$$(\zeta.)\quad \mathsf{A} = [0 - \mathfrak{W}_\alpha \eta + \mathfrak{V}_\alpha \zeta]\cos(\mathsf{N}, \xi)$$
$$+ \text{etc. etc.},$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(\eta.)\quad \mathsf{A} = (\mathfrak{V}_\alpha\zeta - \mathfrak{W}_\alpha\eta)\cos(\mathsf{N},\xi) + (\mathfrak{W}_\alpha\xi - \mathfrak{U}_\alpha\zeta)\cos(\mathsf{N},\eta) + (\mathfrak{U}_\alpha\eta - \mathfrak{V}_\alpha\xi)\cos(\mathsf{N},\zeta).$$

Ordnet man aber diesen Ausdruck nach $\mathfrak{U}_\alpha$, $\mathfrak{V}_\alpha$, $\mathfrak{W}_\alpha$, so nimmt die letzte der Bedingungen (B_1.) folgende Gestalt an:

$$(\vartheta.)\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathsf{N}} = \mathfrak{U}_\alpha\left[\eta\cos(\mathsf{N}, \zeta) - \zeta\cos(\mathsf{N}, \eta)\right] + \mathfrak{V}_\alpha\left[\zeta\cos(\mathsf{N}, \xi) - \xi\cos(\mathsf{N}, \zeta)\right]$$
$$+ \mathfrak{W}_\alpha\left[\xi\cos(\mathsf{N}, \eta) - \eta\cos(\mathsf{N}, \xi)\right].$$

Aus (B_1.) und (ϑ.) folgt sofort, dass die gesuchte Function Φ_1 in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$(45.)\quad \Phi_1 = \mathfrak{U}_\alpha \Phi' + \mathfrak{V}_\alpha \Phi'' + \mathfrak{W}_\alpha \Phi''',$$

wo alsdann z. B. Φ' eine Function von ξ, η, ζ vorstellt, welche den Bedingungen zu entsprechen hat:

$$(46.)\quad \begin{cases} \Phi' \textit{ stetig im Raume } \mathfrak{R}, \\ \dfrac{\partial \Phi'}{\partial \xi}, \dfrac{\partial \Phi'}{\partial \eta}, \dfrac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \textit{ stetig, und } \dfrac{\partial^2 \Phi'}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi'}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi'}{\partial \zeta^2} = 0, \textit{ im Raume } \mathfrak{R}, \\ \dfrac{\partial \Phi'}{\partial \mathsf{N}} = \eta\cos(\mathsf{N}, \zeta) - \zeta\cos(\mathsf{N}, \eta), \textit{ an der Oberfläche von } \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Beachtet man nun, dass der Raum $\mathfrak{R}$ in Bezug auf jede der Ebenen $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ *symmetrisch* ist, ferner, dass die rechte Seite der *letzten* Formel in (46.) bei einer Vertauschung von ξ mit $-\xi$ ungeändert

bleibt, hingegen bei einer Vertauschung von η mit $-\eta$ oder von ζ mit $-\zeta$ ihr Vorzeichen wechselt, so ergiebt sich sofort, dass die durch diese Formeln (46.) definirte Function Φ' in Bezug auf ξ *gerade*, hingegen in Bezug auf η und ebenso in Bezug auf ζ *ungerade* sein muss; was angedeutet sein mag durch die erste Formel des folgenden Systems:

$$(47.)\qquad \begin{aligned} \Phi' &= \Phi'\,(\bar{\xi}, \breve{\eta}, \breve{\zeta}), \\ \Phi'' &= \Phi''\,(\breve{\xi}, \bar{\eta}, \breve{\zeta}), \\ \Phi''' &= \Phi'''\,(\breve{\xi}, \breve{\eta}, \bar{\zeta}). \end{aligned}$$

Die hier gleichzeitig für Φ'' und Φ''' gemachten Angaben resultiren offenbar in analoger Weise. Diese Formeln (47.) geben sofort auch Auskunft über das Verhalten der *Ableitungen* von Φ', Φ'', Φ'''. So wird z. B.

$$(47.\text{ a})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi} \text{ mit dem Symbol } (\breve{\xi}, \breve{\eta}, \breve{\zeta}), \\ &\frac{\partial \Phi''}{\partial \xi} \text{ mit dem Symbol } (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \breve{\zeta}), \end{aligned}$$

zu bezeichnen sein. U. s. w.

Bringt man nun, ähnlich wie früher, für den Ausdruck

$$(48.)\qquad \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial G}{\partial \zeta} \text{ die Abbreviatur } [F, G]$$

in Anwendung, so folgt aus (44.):

$$(49.)\qquad \Theta_{12} = \frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi_1, \Phi_2]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Substituirt man aber hier für Φ_1 den Werth (45.):

$$\Phi_1 = \mathfrak{U}_\alpha \Phi' + \mathfrak{V}_\alpha \Phi'' + \mathfrak{W}_\alpha \Phi''',$$

und für Φ_2 den analogen Werth:

$$\Phi_2 = \mathfrak{U}_\beta \Phi' + \mathfrak{V}_\beta \Phi'' + \mathfrak{W}_\beta \Phi''',$$

so erhält man:

$$(50.)\qquad \Theta_{12} = \frac{\varrho}{2} \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_\beta \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi', \Phi']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{V}_\beta \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi'', \Phi'']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \cdots \\ &+ (\mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{W}_\beta + \mathfrak{V}_\beta \mathfrak{W}_\alpha) \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi'', \Phi''']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \cdots\cdots \end{aligned} \right\}$$

Die drei Integrale *erster* Zeile $\left(\text{noch multiplicirt mit } \frac{\varrho}{2}\right)$, mögen H', H'', H''' genannt werden; zugleich mag beachtet werden, dass die drei Integrale *zweiter* Zeile, zufolge (47.), (47. a), sämmtlich $= 0$ sind:

$$(51.)\qquad \begin{aligned} &\frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi', \Phi']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = H', &&\text{und } \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi'', \Phi''']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0, \\ &\frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi'', \Phi'']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = H'', &&\iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi''', \Phi']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0, \\ &\frac{\varrho}{2} \iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi''', \Phi''']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = H''', &&\iiint_{\mathfrak{R}} [\Phi', \Phi'']\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Nun ist Φ' eine Function von ξ, η, ζ, welche den Bedingungen (46.) zu entsprechen hat, und durch diese Bedingungen völlig bestimmt ist, abgesehen von einem von ξ, η, ζ unabhängigen additiven Gliede. Hieraus folgt, dass die Beschaffenheit der Function Φ', abgesehen von diesem additiven Gliede, *völlig bestimmt ist durch die Gestalt des gegebenen Raumes* $\mathfrak{R}$. Und Gleiches gilt daher, nach (51.), z. B. auch von H'. Auch ist dieses H' [vgl. (48.)] nothwendig *positiv*. *Jene durch* (51.) *eingeführten Grössen* H', H'', H''' *repräsentiren also drei positive Constanten, deren Werthe völlig bestimmt sind durch die Beschaffenheit des gegebenen Raumes* $\mathfrak{R}$.

Die Formel (50.) erhält, mittelst (51.), die einfachere Gestalt:

$$\Theta_{12} = H'\mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta + H''\mathfrak{V}_\alpha\mathfrak{V}_\beta + H'''\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{W}_\beta.$$

Analoge Formeln, und zwar mit *denselben* Constanten H', H'', H''' ergeben sich für alle übrigen Θ_{jk}; sodass man also folgendes System von Formeln erhält:

$$(52.)\qquad \begin{aligned} \Theta_{11} &= H'\mathfrak{U}_\alpha^2 + H''\mathfrak{V}_\alpha^2 + H'''\mathfrak{W}_\alpha^2, \\ \Theta_{12} &= H'\mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta + H''\mathfrak{V}_\alpha\mathfrak{V}_\beta + H'''\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{W}_\beta, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Denkt man sich aber diese Werthe für sämmtliche Grössen Θ_{11}, Θ_{22}, Θ_{33}, Θ_{23}, Θ_{31}, Θ_{12} hingeschrieben, diese Formeln sodann respective mit α'^2, β'^2, γ'^2, $2\beta'\gamma'$, $2\gamma'\alpha'$, $2\alpha'\beta'$ multiplicirt und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (40.):

$$(53.)\qquad [\Theta_{11}\alpha'^2 + 2\Theta_{12}\alpha'\beta' + \cdots] = H'p^2 + H''q^2 + H'''r^2.$$

Ferner ist nach (41.) und (43.):

$$(54.)\qquad \Theta_0 = H_0,$$

und:

$$(55.)\qquad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = h'p + h''q + h'''r.$$

Substituirt man aber diese Werthe (53.), (54.), (55.) in (36.) und (35.), so folgt:

$$(56.)\qquad T = + H_0 + (H'p^2 + H''q^2 + H'''r^2),$$

$$(57.)\qquad f = - H_0 + (H'p^2 + H''q^2 + H'''r^2) - (h'p + h''q + h'''r).$$

Ueberdiess ergibt sich [nach elementaren Formeln der Mechanik] für die lebendige Kraft $\mathfrak{T}$ des *starren Körpers* der Ausdruck:

$$(58.)\qquad \mathfrak{T} = K'p^2 + K''q^2 + K'''r^2,$$

wo K', K'', K''' positive Constanten sind, die lediglich abhängen von der Gestalt und Dichtigkeit des starren Körpers. Aus (57.) und (58.) folgt:

$$(59.)\qquad f + \mathfrak{T} = - H_0 + (C'p^2 + C''q^2 + C'''r^2) - (h'p + h''q + h'''r),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(60.)\quad C' = H' + K', \qquad C'' = H'' + K'', \qquad C''' = H''' + K'''.$$

Unsere Fundamentalformel (37.) *gewinnt somit durch Substitution des Werthes* (59.) *die Gestalt:*

$$(61.)\quad \int_{t_0}^{t_1} \delta\Big[(C'p^2 + C''q^2 + C'''r^2) - (h'p + h''q + h'''r)\Big] \cdot dt = 0.$$

Nun ergeben sich aber, falls $F = F(p, q, r)$ eine beliebig gegebene Function von p, q, r vorstellt, aus der Formel

$$(\alpha.)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta F(p, q, r) \cdot dt = 0$$

im Ganzen drei Differentialgleichungen, die man nach Belieben entweder in der Form:

$$(\beta.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = r\frac{\partial F}{\partial q} - q\frac{\partial F}{\partial r},$$

etc. etc. etc.,

oder in der Form:

$$(\gamma.)\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{A}_1\frac{\partial F}{\partial p} + \mathfrak{B}_1\frac{\partial F}{\partial q} + \mathfrak{C}_1\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0,$$

etc. etc. etc.

darstellen kann, wo z. B. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ die Richtungscosinus der absolut festen x-Axe gegen die drei Hauptaxen ξ, η, ζ des Körpers vorstellen. In der That bildet der Uebergang von (α.) zu (β.) und (γ.) nur einen speciellen Fall derjenigen allgemeinern Transformation, welche *Kirchhoff* in sehr eleganter Weise ausgeführt hat. Vgl. Kirchhoff's Vorlesungen über Math. Physik, 1876, daselbst namentlich die Formeln (13.) und (15.) auf p. 61. Dabei sei bemerkt, dass man, um von jenen Kirchhoff'schen Formeln zu den gegenwärtigen zu gelangen, die dortigen Grössen α, β, γ, u, v, w gleich Null zu machen, überdiess aber die Bezeichnungen:

$$x, y, z, \quad \xi, \eta, \zeta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$$

respective mit

$$\xi, \eta, \zeta, \quad x, y, z, \quad \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \ldots.$$

zu vertauschen hat.

Mit Rücksicht auf diese Angaben (α.), (β.), (γ.) gelangt man nun von der Fundamentalformel (61.) aus zu drei Differentialgleichungen, die man nach Belieben entweder in der Gestalt:

$$(62.)\qquad \begin{aligned} 2C'\frac{dp}{dt} &= 2(C'' - C''')qr - (h''r - h'''q), \\ 2C''\frac{dq}{dt} &= 2(C''' - C')rp - (h'''p - h'r), \\ 2C'''\frac{dr}{dt} &= 2(C' - C'')pq - (h'q - h''p), \end{aligned}$$

oder aber in der Gestalt:

$$
(63.)\quad \begin{aligned}
&\mathfrak{A}_1(2C'p-h')+\mathfrak{B}_1(2C''q-h'')+\mathfrak{C}_1(2C'''r-h''')=(Const.)_1,\\
&\mathfrak{A}_2(2C'p-h')+\mathfrak{B}_2(2C''q-h'')+\mathfrak{C}_2(2C'''r-h''')=(Const.)_2,\\
&\mathfrak{A}_3(2C'p-h')+\mathfrak{B}_3(2C''q-h'')+\mathfrak{C}_3(2C'''r-h''')=(Const.)_3
\end{aligned}
$$

darstellen kann, wo unter den $(Const.)_j$ drei durch den Anfangszustand des Systems sich bestimmende Integrationsconstanten zu verstehen sind. Will man diese Formeln richtig beurtheilen, so hat man vor allen Dingen zu beachten, dass die Constanten C', C'', C''' (60.), ebenso wie die früheren H', H'', H''', K', K'', K''', *lediglich abhängen von der Gestalt und Dichtigkeit des starren Körpers, sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit;* während andererseits die mit den *kleinen* Buchstaben h', h'', h''' bezeichneten Constanten *ausserdem noch abhängig sind von dem jedesmaligen Anfangszustand der Flüssigkeit*, vgl. p. 244. Auch ist bei (63.) daran zu erinnern, dass z. B. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ die augenblicklichen Richtungs-Cosinus der Körperaxe ξ gegen die drei *festen* Axen x, y, z vorstellen, und dass $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$ analoge Bedeutungen haben für die Körperaxen η und ζ.

Denkt man sich Körper und Flüssigkeit zuvörderst *in Ruhe*, mithin die der Flüssigkeit entsprechenden Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... *gleich Null*, sodann aber den Körper von Aussen her durch irgend welche Stösse, oder (besser gesagt) durch irgend welche continuirlich anhebende, mehr und mehr wachsende, aber in einem bestimmten Zeitaugenblick t_0 wieder erlöschende Kräfte in Bewegung versetzt, so erhalten wir auf diese Weise für den Augenblick t_0 einen *Anfangszustand*, bei welchem jene Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... ebenfalls noch *Null* sind. Demgemäss werden in diesem Fall die Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ..., und die von denselben abhängenden Constanten h', h'', h''' bei der weiter folgenden Bewegung des Systems *fortdauernd Null* bleiben. Wir sehen somit, dass in diesem Fall die Differentialgleichungen (62.), (63.) völlig übereinstimmen mit denen, die *für einen massiven starren Körper* (*ohne* innere Flüssigkeit) sich ergeben. Auch ist zu bemerken, dass diese Uebereinstimmung z. B. *stets* stattfindet, wenn der die Flüssigkeit enthaltende Hohlraum ein *einfach* zusammenhängender sein sollte; denn alsdann sind die $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ..., folglich auch die h', h'', h''' *unter allen Umständen Null.*

Denkt man sich hingegen diesen Raum als einen *mehrfach* zusammenhängenden, und, während der Körper noch in Ruhe erhalten wird, zuvörderst die Flüssigkeit in eine *ausserordentlich rapide* Bewegung versetzt, so werden jene Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... (respective einige

derselben) *enorm grosse* Werthe annehmen. Wird nun jetzt der Körper von Aussen her durch continuirlich anhebende, und im Augenblick t_0 wieder erlöschende Kräfte in Bewegung versetzt, so ergiebt sich für diesen Augenblick t_0 ein Anfangszustand, bei welchem die Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... nach wie vor jene *enorm grossen* Werthe, mithin die von ihnen abhängenden Constanten h', h'', h''' ebenfalls *enorme* Werthe haben. Für die weiter folgende Bewegung des Systems erhalten wir somit in diesem Fall Differentialgleichungen, in denen die h', h'', h''', in Folge ihrer enormen Grösse, gegen die übrigen Glieder der Gleichungen überwiegen, sodass also z. B. die Gleichungen (63.) nahezu übergehen in:

$$(64.)\qquad \begin{aligned} -(\mathfrak{A}_1 h' + \mathfrak{B}_1 h'' + \mathfrak{C}_1 h''') &= (Const.)_1, \\ -(\mathfrak{A}_2 h' + \mathfrak{B}_2 h'' + \mathfrak{C}_2 h''') &= (Const.)_2, \\ -(\mathfrak{A}_3 h' + \mathfrak{B}_3 h'' + \mathfrak{C}_3 h''') &= (Const.)_3; \end{aligned}$$

woraus folgt, dass in diesem Fall die Hauptaxen ξ, η, ζ des Körpers *nahezu in Ruhe bleiben, also nur in ein leichtes Schwanken gerathen.* Sind jene Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... *enorm gross,* oder besser *unendlich gross,* so wird dieses Schwanken oder Zittern der Hauptaxen um so heftiger sein, je grösser die dem Körper zuertheilten Anfangsgeschwindigkeiten gewesen sind.

Ergänzung. — In welcher Weise die h', h'', h''' von den $\varkappa$'s abhängen, ergiebt sich leicht. So z. B. sind in dem früher betrachteten Beispiel, wo nur *ein* $\varkappa$ existirte, die h', h'', h''' mit diesen $\varkappa$ proportional; vgl. (26.) p. 245. Und sind andererseits *mehrere* $\varkappa$'s vorhanden: $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ..., so wird jedes h die Form besitzen:

$$(\alpha.)\qquad h = \varkappa c + \varkappa' c' + \varkappa'' c'' + \ldots .$$

wo c, c', c'', ... Constanten sind, die lediglich abhängen *von der Gestalt des inneren Hohlraums* $\mathfrak{R}$. Dies ergiebt sich leicht aus den Formeln (21.) p. 244, falls man dabei nur die Art und Weise, in welcher Φ_0 zu bestimmen ist, berücksichtigt. Denn die Function Φ_0 hat den Bedingungen (B_0.) p. 238 zu entsprechen. Diesen Bedingungen wird aber genügt, wenn man

$$(\beta.)\qquad \Phi_0 = \varkappa \varphi_0 + \varkappa' \varphi_0' + \varkappa'' \varphi_0'' + \ldots .$$

setzt, und dabei z. B. unter φ_0 diejenige *specielle* Function Φ_0 versteht, für welche $\varkappa = 1$ und die übrigen $\varkappa$'s $= 0$ sind; ebenso unter φ_0' diejenige *specielle* Function Φ_0, für welche $\varkappa' = 1$, die übrigen $\varkappa$'s aber $= 0$ sind; u. s. w. Die in solcher Weise definirten Functionen φ_0, φ_0', φ_0'', ... sind alsdann von den $\varkappa$'s unabhängig, also Functionen von ξ, η, ζ, welche nur noch abhängen von der geometrischen Gestalt des gegebenen Hohlraums. Substituirt man aber für Φ_0 den Ausdruck (β.) in die Formeln (21.) p. 244, so findet man sofort, dass die Constanten h', h'', h''' jene in (α.) angegebene Gestalt besitzen müssen.

Die Hauptresultate des gegenwärtigen § lassen sich leicht *verallgemeinern*, und lauten alsdann folgendermassen:

Befindet sich innerhalb eines starren Körpers ein einfach zusammenhängender und mit incompressibler Flüssigkeit erfüllter Hohlraum, so wird der Körper unter dem Einfluss gegebener äusserer Kräfte nach genau denselben Gesetzen sich bewegen, welche für einen gewöhnlichen massiven Körper (ohne innere Flüssigkeit) gelten. Hingegen werden jene Gesetze wesentlich andere sein, wenn der mit Flüssigkeit erfüllte Hohlraum ein mehrfach zusammenhängender, und die Flüssigkeit zu Anfang im Innern dieses Hohlraums in rapide Bewegung versetzt ist. — Dass die in Rede stehenden Gesetze in dem hier genannten Fall irgend welche Abänderungen, und bei vehementer Bewegung der Flüssigkeit sehr *bedeutende* Abänderungen erfahren *müssen*, hätte man übrigens, mit Rücksicht auf das Phänomen des *Fessel*'schen Rotationsapparates und ähnliche Phänomene, *a priori* voraussehen können. Diese Abänderungen aber würden, falls man das *Hamilton*'sche Princip nicht in der von mir gegebenen *neuen* Form [(B.) p. 5], sondern in seiner *gewöhnlichen* Gestalt [(2.) p. 2] in Anwendung bringen wollte, fehlerhafter Weise völlig in Wegfall kommen. Und man ersieht daher aus den gegenwärtigen Betrachtungen, wie wichtig die Ersetzung jener *gewöhnlichen* Form durch die *neue* unter Umständen sein kann.

§ 5.

Beiläufige Bemerkung über die den Schwerpunct und die Flächengeschwindigkeit betreffenden allgemeinen Principien der Mechanik.

Den von *Dirichlet*, *Clebsch*, *Thomson*, *Kirchhoff*, *Boltzmann*, etc. behandelten hydrodynamischen Problemen ist durch die vorhergehenden Paragraphe eine *neue* Gattung von Problemen gegenübergestellt. Man könnte die von jenen Autoren behandelten Probleme, bei denen die Flüssigkeit *ausserhalb* des starren Körpers sich befindet, und nach allen Seiten ins Unendliche reicht, etwa kurzweg als *äussere* Probleme, und ebenso die hier von mir erwähnten Probleme, bei denen die Flüssigkeit *innerhalb* des starren Körpers, nämlich innerhalb eines in dem Körper vorhandenen Hohlraumes sich befindet, als *innere* Probleme bezeichnen.

Dass wir bei einem solchen *inneren* Probleme ein materielles System vor uns haben, auf welches die in der Ueberschrift dieses § genannten Principien anwendbar sind, unterliegt keinem Zweifel; — vorausgesetzt, dass der betrachtete (in seinem Innern die Flüssigkeit

enthaltende) starre Körper im *leeren* Raume sich befindet. Gleiches gilt aber auch bei den *äusseren* Problemen, wie sich leicht zeigen lässt.

Bezeichnet man nämlich im Fall eines solchen *äusseren* Problemes alle überhaupt in Betracht kommenden, theils dem starren Körper, theils der Flüssigkeit angehörenden Molecüle mit $m_1, m_2, m_3, \ldots$, und nimmt man, der Einfachheit willen, an, dass auf dieses System *keine* äusseren Kräfte einwirken, so erhält man für die Coordinaten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Molecüle $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Differentialgleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= 0 + X_1^2 + X_1^3 + X_1^4 + \ldots. \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2^1 + 0 + X_2^3 + X_2^4 + \ldots. \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= X_3^1 + X_3^2 + 0 + X_3^4 + \ldots. \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

wo unter X_j^h die x-Componente derjenigen Kraft zu verstehen ist, welche das Molecül m_h auf m_j ausübt. Addirt man aber all' diese Differentialgleichungen, so folgt:

$$(2.)\qquad \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Denn für je zwei im *Endlichen* liegenden Molecüle m_h und m_j ist offenbar $X_j^h + X_h^j = 0$; während gleichzeitig die Kräfte X_j^h respective X_h^j für die *unendlich fernen*, also fortdauernd in *Ruhe* bleibenden Molecüle als *Null* betrachtet werden dürfen. Aus (2.) folgt sofort:

$$(3.)\qquad \sum m \frac{dx}{dt} = \text{Const.}$$

wo die Summation beschränkt werden darf auf diejenigen Molecüle m, für welche das $\frac{dx}{dt}$ *nicht* verschwindet, d. i. auf die *in Bewegung begriffenen* Molecüle. Mit (3.) analoge Formeln ergeben sich für die y- und z-Coordinaten; sodass man also, auf Grund dieser Formeln, zu folgendem Satz gelangt:

Ist ein starrer Körper in Bewegung begriffen im Innern einer nach allen Seiten ins Unendliche reichenden und im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit, und setzt man voraus, dass auf dieses System keinerlei äussere Kräfte einwirken, so wird der Schwerpunct aller in Bewegung begriffenen (theils zum Körper, theils zur Flüssigkeit gehörigen) Molecüle in geradliniger Bahn mit constanter Geschwindigkeit fortschreiten.

Und in ähnlicher Weise wird man offenbar finden, dass für das hier betrachtete materielle System auch die sogenannten Flächensätze Giltigkeit haben. Nur hat man dabei wiederum nicht von sämmtlichen Molecülen des gegebenen Systems, sondern von den in Bewegung begriffenen Molecülen desselben zu sprechen).*

Das Wesentliche der gegenwärtigen Betrachtung besteht nämlich darin, dass man z. B. die Formel (3.) *nicht nach der Zeit integriren darf.* Denn sonst würde man auf der linken Seite den Ausdruck

$$\sum mx,$$

d. i. eine *völlig unbestimmte* Grösse erhalten.

§ 6.

Die Uebereinstimmung der aus dem Hamilton'schen Princip abgeleiteten Formeln mit den Anforderungen des Princips der lebendigen Kraft.

Man kann den Ausdruck (9.) p. 63:

$$f = T - W - 2\Theta_0 - (A\alpha' + B\beta' + \cdots) \tag{1.}$$

in drei Theile zerreissen:

$$f = f_0 + f_1 + f_2, \tag{2.}$$

welche in Bezug auf die $\alpha', \beta', \ldots$ *homogene* Functionen sind respective von der 0[ten], 1[ten] und 2[ten] Ordnung. Alsdann ist offenbar:

$$\begin{aligned} f_0 &= -W - \Theta_0, \\ f_1 &= -(A\alpha' + B\beta' + \cdots), \\ f_2 &= T - \Theta_0, \text{ mithin z. B.: } f_2 - f_0 = T + W. \end{aligned} \tag{3.}$$

Dies vorangeschickt, bilden wir nun die *in Wirklichkeit* von der Flüssigkeit auf die anliegenden Membranen ausgeübte Arbeit dL, (nicht die *virtuelle* Arbeit δL). Diese wirkliche Arbeit dL hat nach (7.) p. 63 für ein unendlich kleines Zeitelement dt den Werth:

$$dL = L_1 d\alpha + L_2 d\beta + \cdots. \tag{4.}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\frac{dL}{dt} = L_1 \frac{d\alpha}{dt} + L_2 \frac{d\beta}{dt} + \cdots = L_1\alpha' + L_2\beta' + \cdots, \tag{5.}$$

*) Die hier für diese Sätze mitgetheilten resp. angedeuteten Beweise lassen hinsichtlich ihrer Strenge Manches zu wünschen übrig. Doch wird man leicht die *strengeren Beweise* finden können.

oder falls man für $L_1, L_2, \ldots$ ihre Werthe (10.) p. 63 einsetzt:

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\right)\alpha' + \cdots. \tag{6.}$$

Sollen nun unsere allgemeinen Formeln (p. 61—63) ***wirklich richtig sein,*** *so muss der soeben mittelst dieser Formeln erhaltene Werth von* $\frac{dL}{dt}$ (6.) *identisch mit demjenigen sein, welcher durch Anwendung des* ***Princips der lebendigen Kraft*** (p. 37) *sich ergiebt, also* ***identisch sein mit dem Ausdruck:*** $-\frac{d(T+W)}{dt}$.

In der That werde ich zeigen, dass der eine Werth in den andern sich transformiren lässt. Aus (6.) folgt:

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha' + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\alpha'' + \cdots\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\alpha' + \cdots\right), \tag{7.}$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{df}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha'}\alpha' + \cdots\right). \tag{8.}$$

Nach (2.), (3.) ist aber $f = f_0 + f_1 + f_2$, wo f_0, f_1, f_2 homogene Functionen von $\alpha', \beta', \ldots$ sind, respective vom 0ten, 1ten und 2ten Grade. Demgemäss kann die Formel (8.) offenbar auch so geschrieben werden:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(f_0 + f_1 + f_2)}{dt} - \frac{d(f_1 + 2f_2)}{dt}, \tag{9.}$$

oder mit Rücksicht auf (3.) auch so:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(f_0 - f_2)}{dt} = -\frac{d(T+W)}{dt}. \quad Q.\ e.\ d. \tag{10.}$$

§ 7.

Analytische Umgestaltungen der in den Formeln des Hamilton'schen Princips auftretenden, schon in § 1 p. 237 besprochenen Differenzen*).

Bezeichnet man, wie bei früherer Gelegenheit, die Differenz $\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)$ mit G_2:

$$G_2 = \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}. \tag{I.}$$

*) Wie bereits p. 237 bemerkt wurde, habe ich mich lange Zeit hindurch bemüht, zu beweisen, dass diese Differenzen = 0 seien; was in Wirklichkeit ***nicht*** der Fall ist. Die mancherlei Umgestaltungen, welche ich bei jenen Bemühungen für die genannten Differenzen gefunden habe, und welche vielleicht für **spätere** Gelegenheiten von Nutzen sein könnten, erlaube ich mir im **gegenwärtigen § kurz** anzugeben.

so ist nach (χ.) p. 73:

(II.) $$G_2 = \varrho \left[\frac{\partial}{\partial\beta}\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,dx\,dy\,dz\right],$$

ferner nach (τ.) p. 73:

(III.) $$G_2 = \varrho\iint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,\mathsf{B} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\,\mathsf{A}\right]d\sigma.$$

Hieraus folgt weiter mittelst der Gleichungen (π.), (ϱ.) p. 73:

(IV.) $$G_2 = \varrho\iint_{\mathfrak{R}} \left[(\Phi_0, \Phi_1)\mathsf{B} - (\Phi_0, \Phi_2)\mathsf{A}\right]d\sigma.$$

Nun ist aber nach (d.) p. 69 z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} (\Phi_0, \Phi_2)\mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial(\Phi_0, \Phi_2)}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz.$$

wo das Integral *linker* Hand $= 0$ ist; wie sich solches mittelst der Transformation (ζ.) p. 42 und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathsf{N}} = 0$ ist [vgl. (B_0.) p. 39], leicht ergiebt. Somit folgt aus (IV.):

(V.) $$G_2 = \varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial(\Phi_0, \Phi_2)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(\Phi_0, \Phi_1)}{\partial\beta}\right]dx\,dy\,dz.$$

Beachtet man ferner, dass $\mathsf{A} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathsf{N}}$ und $\mathsf{B} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathsf{N}}$ ist [vgl. (B_1.) und (B_2.) p. 39], so folgt aus (III.):

(VI.) $$G_2 = \varrho\iint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathsf{N}} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathsf{N}}\right]d\sigma.$$

Mittelst der Transformationsformel (γ.) p. 41 ergiebt sich aber z. B.:

$$\iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathsf{N}}\,d\sigma = \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}, \Phi_2\right)dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_2\frac{\partial}{\partial\mathsf{N}}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\right)d\sigma.$$

Und mit Rücksicht auf diese beiderlei Umgestaltungen ergiebt sich aus (VI.) einerseits:

(VII.) $$G_2 = \varrho\iiint_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}, \Phi_2\right) - \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}, \Phi_1\right)\right]dx\,dy\,dz,$$

und andererseits:

(VIII.) $$G_2 = \varrho\iint_{\mathfrak{R}} \left[\Phi_2\frac{\partial}{\partial\mathsf{N}}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\right) - \Phi_1\frac{\partial}{\partial\mathsf{N}}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\beta}\right)\right]d\sigma.$$

Eine besonders einfache Gestalt für dieses G_2 ergiebt sich schliesslich aus der Formel (III.). Nach (d.) p. 69 ist nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\iiint_{\mathfrak{R}} \Phi_0\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{R}} \Phi_0\mathsf{A}\,d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\,dx\,dy\,dz;$$

hieraus folgt durch Differentiation nach β, und mit abermaliger Benutzung der Formel (d.) p. 69:

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\iiint_{\mathfrak{R}} \Phi_0 dx dy dz = \frac{\partial}{\partial\beta}\iint_{\mathfrak{R}} \Phi_0 \mathsf{A} d\sigma + \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\mathsf{B} d\sigma + \iiint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\alpha\,\partial\beta} dx dy dz.$$

Subtrahirt man aber diese Gleichung von derjenigen, welche aus ihr durch Vertauschung von α, A mit β, B entsteht, so erhält man eine Formel, mittelst deren der Ausdruck (III.) folgende Gestalt gewinnt:

$$\text{(IX.)} \qquad G_2 = \varrho\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\iint_{\mathfrak{R}} \Phi_0 \mathsf{B} d\sigma - \frac{\partial}{\partial\beta}\iint_{\mathfrak{R}} \Phi_0 \mathsf{A} d\sigma\right].$$

Einige sich anschliessende Betrachtungen über die Probleme der elektrischen und namentlich der magnetischen Induction.

§ 1.

Das elektrostatische Problem für zwei Kugeln.

Man kann dieses Problem im Ganzen genommen nach *vier* verschiedenen Methoden behandeln, nämlich:

Erstens nach der Poisson'schen Methode, unter Anwendung der gewöhnlichen Polarcoordinaten; wobei zu bemerken ist, dass diese Methode nur auf den Fall anwendbar ist, dass *keine* äussern Kräfte influiren.

Zweitens nach der von Thomson und Liouville angegebenen Methode der reciprocen Radien. Diese Methode, von welcher namentlich auch *Dirichlet* in seinen Vorlesungen Gebrauch gemacht hat, besteht im Wesentlichen darin, dass man die beiden gegebenen Kugelflächen mittelst der Theorie der reciprocen Radien in zwei *concentrische* Kugelflächen verwandelt.

Drittens mit Hülfe der Thomson'schen Spiegelpuncte; wobei man alsdann nach Belieben entweder der *gewöhnlichen Polarcoordinaten*, oder aber (was vortheilhafter sein dürfte) der *dipolaren Coordinaten* sich bedienen kann.

Viertens endlich kann man das Problem lösen allein durch Anwendung der dipolaren Coordinaten, ohne irgend welche weiteren Hülfsmittel. Diese letzte Methode, welche vielleicht unter allen die einfachste ist, dürfte wohl zuerst in meinem Werke von 1862 angegeben worden sein.

In diesem Werke (Ueber den stationären Temperaturzustand in einem homogenen Körper, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle, 1862), habe ich nämlich sowohl die *dritte* wie auch die *vierte* Methode exponirt, die eine unter dem Namen der *„geometrischen“*, die andere unter dem der *„analytischen Methode“*.

Doch lässt die dort von mir gegebene Darstellung Manches zu wünschen übrig. Und demgemäss benutze ich die gegenwärtige Gelegenheit, um speciell jene *vierte Methode* von Neuem, und in möglichst übersichtlicher Gestalt mitzutheilen. Dabei werden, hinsichtlich der dipolaren Coordinaten, nur die wenigen und einfachen Kenntnisse erforderlich sein, welche im gegenwärtigen Werk p. 97—110 deponirt sind.

Wir beginnen mit folgender vorbereitender Aufgabe: *Irgend eine Kugelfläche des dipolaren Systems vom Parameter ϑ sei in willkührlicher Weise mit Masse belegt; und zwar sei die Dichtigkeit η dieser Belegung für jeden Punct $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ der Kugelfläche von folgendem Werth:*

$$\eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}}{2a} \sum X_n(\mu, \varphi),^{*}) \tag{1.}$$

*wo $X_n(\mu, \varphi)$ die allgemeine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung**) vorstellen soll. Es soll die Gesammtmasse $\mathfrak{M}$ dieser Belegung berechnet werden, und ebenso auch das von ihr auf irgend einen äussern oder innern Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ ausgeübte Potential $U = U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$.*

Bezeichnet man das bei $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ gelegene Oberflächenelement der gegebenen Kugel mit $d\sigma$, ferner die reciproce Entfernung dieses Elementes vom Puncte $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ mit T, so ergiebt sich:

$$d\sigma = \frac{4a^2 d\mu\, d\varphi}{\psi^2}, \quad \text{[nach (32.) p. 108]}, \tag{A.}$$

$$T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a} \sum e^{\pm N(\vartheta-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma), \quad \text{[nach p. 110]}, \tag{B.}$$

wo das Vorzeichen $\pm$ in jedem Falle so zu wählen ist, dass der Exponent *negativ* wird. Gleichzeitig ergiebt sich:

$$\mathfrak{M} = \iint \eta\, d\sigma = \iint \left(\frac{1}{\sqrt{\psi}}\right) \sqrt{\psi} \cdot \eta\, d\sigma. \tag{C.}$$

$$U = U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \iint T\eta\, d\sigma. \tag{D.}$$

Substituirt man hier für η, $d\sigma$, T die Werthe (1.), (A.), (B.) und lässt man gleichzeitig in (C.) für den daselbst eingeklammerten Factor die Entwicklung eintreten:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \sum e^{\pm N\vartheta} P_n(\mu), \qquad \text{[vgl. p. 110]},$$

---

*) Wir setzen durchweg μ für $\cos\omega$. Auch sollen im gegenwärtigen § die Summen stets von $n = 0$ bis $n = \infty$ ausgedehnt gedacht werden. Ueberdiess wird, wie früher, die Zahl $n + \frac{1}{2}$ häufig mit N bezeichnet werden.

**) Es ist also $X_n(\mu, \varphi)$ dieselbe Function, welche von *Laplace* mit $Y_n(\mu, \varphi)$ bezeichnet wird.

so erhält man:

$$\mathfrak{M} = 2a \iint \left(\sum e^{\pm N\vartheta} P_n(\mu)\right) \left(\sum X_n(\mu, \varphi)\right) d\mu d\varphi,$$

$$U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \iint \left(\sum e^{\pm N(\vartheta - \vartheta_1)} P_n(\cos\gamma)\right) \left(\sum X_n(\mu, \varphi)\right) d\mu d\varphi.$$

Und hieraus folgt mittelst der bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen:

$$(2.)\qquad \mathfrak{M} = 2a \sum \frac{2\pi}{N} e^{\pm N\vartheta} X_n(1, 0),$$

$$(3.)\qquad U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum \frac{2\pi}{N} e^{\pm N(\vartheta - \vartheta_1)} X_n(\mu_1, \varphi_1),$$

wo ebenso, wie in den früheren Formeln, die Vorzeichen $\pm$ stets so zu wählen sind, dass die Exponenten *negativ* werden. Hiermit aber ist die gestellte Aufgabe absolvirt.

Erläuterung. — Das in (B.) eingeführte $\cos\gamma$ hat offenbar die Bedeutung:

$$(a.)\qquad \cos\gamma = \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi - \varphi_1).$$

Demgemäss ist nach den bekannten Integral-Eigenschaften der Kugelfunctionen:

$$(b.)\qquad \iint P_n(\cos\gamma)\, X_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = \frac{2\pi}{N} X_n(\mu_1, \varphi_1);$$

die Integration ausgedehnt gedacht über die ganze Kugelfläche, d. i. über $\mu = -1 \ldots +1$ und $\varphi = 0 \ldots 2\pi$. Dabei steht wiederum N zur Abkürzung für $n + \frac{1}{2}$. — Bringt man jetzt aber diese allgemeine Formel (b.) auf den *speciellen Fall*: $\mu_1 = 1$ in Anwendung, so wird $\cos\gamma = \mu$, mithin:

$$(c.)\qquad \iint P_n(\mu) X_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = \frac{2\pi}{N} X_n(1, \varphi_1),$$

wo offenbar φ_1 *beliebig* ist, also z. B. auch $= 0$ gesetzt werden darf. In solcher Weise entsteht das in (2.) aufgeführte $X_n(1, 0)$.

Bei der Behandlung des elektrostatischen Problems werde ich hauptsächlich *zwei* Aufgaben in Betracht ziehen, auf welche sich alsdann alle übrigen Aufgaben leicht zurückführen lassen.

§ 2.

Erste elektrostatische Aufgabe.

Wir wollen uns jetzt irgend zwei Kugelflächen des dipolaren Systems markirt denken, mit den Parametern $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = \tau_0$, von denen die eine den Pol $A(\vartheta = \infty)$, die andere den Pol $A'(\vartheta = -\infty)$ umschliessen mag; sodass also

$$(4.)\qquad \tau = pos. \quad \text{und} \quad \tau_0 = neg.$$

ist. Gleichzeitig mögen unter q, q_0 und f folgende *positive ächte Brüche* verstanden werden:

$$q = e^{-\tau}, \quad q_0 = e^{\tau_0}, \quad f = qq_0 = e^{\tau_0 - \tau}. \tag{5.}$$

Dass diese den gegebenen beiden Kugelflächen zugehörigen Constanten q, q_0 und f *sehr einfache und anschauliche geometrische Bedeutungen* haben, ist früher gezeigt worden. Vgl. (σ.) p. 205.

Diese Kugeln (τ) *und* (τ_0) *mögen nun zwei isolirte Metallkugeln sein. Wir wollen annehmen, dieselben seien, ohne Influenz äusserer Kräfte, bis zu irgend welchen gegebenen Spannungen (Potentialwerthen)* C *und* C_0 *mit Elektricität geladen. Es sollen diese Ladungen, d. i. die Dichtigkeiten* η *und* η_0 *der betreffenden elektrischen Belegungen näher bestimmt werden.*

Da keine äusseren Kräfte influiren sollen, so werden die noch unbekannten elektrischen Belegungen *symmetrisch* sein in Bezug auf die Centrallinie der beiden Kugeln. Bezeichnet man also irgend zwei variable Puncte auf der einen und andern Kugelfläche mit (τ, μ, φ, ψ) und ($\tau_0, \mu_0, \varphi_0, \psi_0$), so werden jene Dichtigkeiten η und η_0 *unabhängig* sein von den Azimuthen φ und φ_0. Und demgemäss machen wir für η und η_0 die Ansätze:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\psi\sqrt{\psi}}{2a} \sum A_n P_n(\mu), \\ \eta_0 &= \frac{\psi_0\sqrt{\psi_0}}{2a} \sum B_n P_n(\mu_0), \end{aligned} \tag{6.}$$

wo die A und B unbekannte Constanten vorstellen. Zufolge der vorangeschickten allgemeinen Formeln (1.), (2.), (3.) haben alsdann die Gesammtmassen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_0$ der beiden Belegungen, und die von ihnen auf irgend einen Raumpunct ($\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1$) ausgeübten Potentiale U und U_0 die Werthe:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2a \sum' \frac{2\pi}{N} e^{-N\tau} A_n = 2a \sum' \frac{2\pi}{N} q^N A_n, \\ \mathfrak{M}_0 &= 2a \sum' \frac{2\pi}{N} e^{N\tau_0} B_n = 2a \sum' \frac{2\pi}{N} q_0^N B_n, \qquad \text{[vgl. (5.)]}, \end{aligned} \tag{7.}$$

und ferner:

$$\begin{aligned} U &= U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum' \frac{2\pi}{N} e^{\pm N(\tau - \vartheta_1)} A_n P_n(\mu_1), \\ U_0 &= U_0(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum' \frac{2\pi}{N} e^{\pm N(\tau_0 - \vartheta_1)} B_n P_n(\mu_1); \end{aligned} \tag{8.}$$

wo die Vorzeichen $\pm$ bei jeder Lage des variablen Punctes ($\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1$) so zu bestimmen sind, dass die Exponenten *negativ* werden.

Lässt man also z. B. diesen Punct *innerhalb der Kugelfläche* (τ) sich befinden, so wird [vgl. (4.)] $\vartheta_1 > \tau > \tau_0$, und folglich:

$$(8. a)\quad \begin{aligned} U &= U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum{}' \frac{2\pi}{N} e^{N(\tau-\vartheta_1)} A_n P_n(\mu_1), \\ U_0 &= U_0(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum{}' \frac{2\pi}{N} e^{N(\tau_0-\vartheta_1)} B_n P_n(\mu_1). \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Potentiale repräsentirt aber das *elektrische Gesammtpotential* in jenem innern Punct ($\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1$); und dieses soll den gegebenen constanten Werth C besitzen. Es soll also sein:

$$U + U_0 = C,$$

d. i.

$$\frac{U}{\sqrt{\psi_1}} + \frac{U_0}{\sqrt{\psi_1}} = \frac{C}{\sqrt{\psi_1}} = C \sum{}' e^{-N\vartheta_1} P_n(\mu_1), \quad \text{[vgl. (35. a, b) p. 110].}$$

Und diese Formel gewinnt durch Substitution der Werthe von U, U_0 (8. a) die Gestalt:

$$\sum{}' \frac{2\pi}{N} (e^{N\tau} A_n + e^{N\tau_0} B_n) e^{-N\vartheta_1} P_n(\mu_1) = C \sum{}' e^{-N\vartheta_1} P_n(\mu_1).$$

Hieraus aber folgt, weil die Gleichung für *beliebige* Lagen jenes inneren Punctes ($\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1$) stattfinden soll, sofort:

$$\frac{2\pi}{N} (e^{N\tau} A_n + e^{N\tau_0} B_n) = C,$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$(F.)\quad A_n q^{-N} + B_n q_0^N = \frac{N}{2\pi} C.$$

Eine *zweite* Gleichung (F_0.) zur Bestimmung der Constanten A, B wird sich offenbar dadurch ergeben, dass man den Punct ($\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1$) nicht in das Innere der Kugel (τ), sondern in das Innere der Kugel (τ_0) versetzt. Diese zweite Formel (F_0.) muss mit der schon aufgestellten Formel (F.) analog sein, nämlich aus dieser entstehen durch Vertauschung der q, C, A und q_0, C_0, B. Sie wird also lauten:

$$(F_0.)\quad B_n q_0^{-N} + A_n q^N = \frac{N}{2\pi} C_0.$$

Berechnet man jetzt aus diesen beiden Formeln (F.) und (F_0.) die Werthe der A und B, so findet man sofort:

$$(9.)\quad \begin{aligned} A_n &= \frac{N}{2\pi} \frac{C - C_0 q_0^{2N}}{1 - f^{2N}} q^N, \\ B_n &= \frac{N}{2\pi} \frac{C_0 - C q^{2N}}{1 - f^{2N}} q_0^N, \end{aligned}$$

wo f die in (5.) angegebene Bedeutung hat. Substituirt man schliesslich diese Werthe (9.) in (6.) und (7.), so erhält man:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \eta &= \frac{\psi\sqrt{\psi}}{4\pi a} \sum \frac{C - C_0 q_0^{2N}}{1 - f^{2N}} N q^N P_n(\mu), \\ \eta_0 &= \frac{\psi_0\sqrt{\psi_0}}{4\pi a} \sum \frac{C_0 - C q^{2N}}{1 - f^{2N}} N q_0^N P_n(\mu_0), \end{aligned}$$

und ferner:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2a \sum \frac{C - C_0 q_0^{2N}}{1 - f^{2N}} q^{2N}, \\ \mathfrak{M}_0 &= 2a \sum \frac{C_0 - C q^{2N}}{1 - f^{2N}} q_0^{2N}. \end{aligned}$$

Diese Formeln (11.) können auch so geschrieben werden:

$$(12.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \alpha C + \beta C_0, \\ \mathfrak{M}_0 &= \beta C + \gamma C_0, \end{aligned}$$

wo alsdann α, β, γ die Werthe besitzen:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} \alpha &= +\, 2a \sum \frac{q^{2N}}{1 - f^{2N}}, \\ \beta &= -\, 2a \sum \frac{f^{2N}}{1 - f^{2N}}, \\ \gamma &= +\, 2a \sum \frac{q_0^{2N}}{1 - f^{2N}}.\text{*)} \end{aligned}$$

Denkt man sich also zwei Metallkugeln, ***ohne*** *Einwirkung äusserer Kräfte, bis zu gegebenen Spannungen C und C_0 geladen, so werden die Dichtigkeiten η, η_0 und die Massen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ der auf den Kugeln vorhandenen elektrischen Belegungen die in* (10.) *und* (11.) *angegebenen Werthe besitzen.*

Auch wird man die Potentiale U und U_0, welche diese Belegungen einzeln genommen auf irgend welchen Raumpunct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ besitzen, sofort anzugeben im Stande sein. Denn diese Potentiale werden dargestellt sein durch die Formeln (8.), *sobald man darin für die Constanten A und B die Werthe* (9.) *substituirt hat.*

---

*) Da q, q_0, f *positive ächte Brüche* sind [vgl. (5.)], so folgt aus (13.) sofort, dass α, γ stets *positiv* sind, hingegen β stets *negativ*. Dies hätte übrigens *a priori* erschlossen werden können aus einem gewissen von mir aufgestellten allgemeinen Satz. Vgl. die Berichte der Kgl. Sächsisch. Ges. der Wissen. vom April 1880, daselbst p. 35.

§ 3.

Zweite elektrostatische Aufgabe.

Es sollen diejenigen elektrischen Belegungen berechnet werden, welche auf den beiden Metallkugeln (τ) *und* (τ_0) *inducirt werden durch einen äussern elektrischen Massenpunct* $\mathfrak{m}_2$ $(\vartheta_2, \mu_2, \varphi_2, \psi_2)$. *Dabei soll vorausgesetzt sein, dass die beiden Kugeln zur Erde abgeleitet sind.*

Da jener Punct $\mathfrak{m}_2$ ausserhalb der beiden Kugeln liegen soll, so wird seine ϑ-Coordinate ihrer Grösse nach zwischen den Parametern τ und τ_0 der beiden Kugeln liegen; sodass also [vgl. (4.)] die Relation stattfindet:

$$(14.)\qquad \tau > \vartheta_2 > \tau_0.$$

Setzt man also:

$$(15.)\qquad g = e^{\vartheta_2 - \tau} \quad \text{und} \quad g_0 = e^{\tau_0 - \vartheta_2},$$

so sind g und g_0 *positive ächte Brüche.* Von diesen Brüchen, ebenso wie von den schon früher angegebenen Brüchen q, q_0, f soll weiterhin Gebrauch gemacht werden zur Abkürzung unserer Formeln; wobei die Relationen zu bemerken sind:

$$(16.)\qquad gg_0 = qq_0 = f, \qquad [\text{vgl. } (5.)].$$

Bezeichnen wir zwei variable Puncte auf den beiden Kugelflächen (τ) und (τ_0) respective mit $(\tau, \mu, \varphi, \psi)$ und $(\tau_0, \mu_0, \varphi_0, \psi_0)$, und machen wir für die Dichtigkeiten η und η_0 der beiden unbekannten elektrischen Belegungen in diesen Puncten die Ansätze:

$$(17.)\qquad \begin{aligned} \eta &= \frac{\psi\sqrt{\psi}}{2a} \sum X_n(\mu, \varphi), \\ \eta_0 &= \frac{\psi_0\sqrt{\psi_0}}{2a} \sum Y_n(\mu_0, \varphi_0), \end{aligned}$$

wo die X_n und Y_n noch unbekannte Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung vorstellen, so lassen sich die Gesammtmassen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_0$ dieser Belegungen und die von denselben auf irgend einen Raumpunct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ ausgeübten Potentiale U und U_0 sofort angeben auf Grund der allgemeinen Formeln (1.), (2.), (3.). Man erhält:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2a \sum \frac{2\pi}{N} e^{-N\tau} X_n(1, 0) = 2a \sum \frac{2\pi}{N} q^N X_n(1, 0), \\ \mathfrak{M}_0 &= 2a \sum \frac{2\pi}{N} e^{N\tau_0} Y_n(1, 0) = 2a \sum \frac{2\pi}{N} q_0^N Y_n(1, 0), \end{aligned}$$

und ferner:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} U &= U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum \frac{2\pi}{N} e^{\pm N(\tau - \vartheta_1)} X_n(\mu_1, \varphi_1), \\ U_0 &= U_0(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum \frac{2\pi}{N} e^{\pm N(\tau_0 - \vartheta_1)} Y_n(\mu_1, \varphi_1), \end{aligned}$$

wo die Vorzeichen so zu bestimmen sind, dass die Exponenten *negativ* werden. Liegt also z. B. der Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ *innerhalb der Kugelfläche* (τ), ist mithin $\vartheta_1 > \tau > \tau_0$, so ergiebt sich:

$$(19.\,a)\qquad \begin{aligned} U &= U(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum \frac{2\pi}{N} e^{N(\tau-\vartheta_1)} X_n(\mu_1, \varphi_1), \\ U_0 &= U_0(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum \frac{2\pi}{N} e^{N(\tau_0-\vartheta_1)} Y_n(\mu_1, \varphi_1). \end{aligned}$$

Für jeden solchen *innern* Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ muss aber (weil die Kugeln zur Erde abgeleitet sind) das *elektrische Gesammtpotential* $= 0$ sein, d. h. die Gleichung stattfinden:

$$(20.)\qquad U + U_0 + \mathfrak{m}_2 T_{21} = 0,$$

wo T_{21} die reciproce Entfernung des gegebenen elektrischen Massenpunctes $\mathfrak{m}_2$ $(\vartheta_2, \mu_2, \varphi_2, \psi_2)$ von jenem innern Puncte $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ vorstellt. Diese Gleichung aber nimmt, falls man für U, U_0 die Werthe (19. a) und überdiess für T_{21} die Entwicklung:

$$(21.)\qquad T_{21} = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_2}}{2a} \sum e^{N(\vartheta_2-\vartheta_1)} P_n(\cos\gamma), \qquad \text{[vgl. p. 110]},$$

substituirt, eine Gestalt an, aus der sofort sich ergiebt:

$$\frac{2\pi}{N}\Big(e^{N\tau} X_n(\mu_1, \varphi_1) + e^{N\tau_0} Y_n(\mu_1, \varphi_1)\Big) + \frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a} e^{N\vartheta_2} P_n(\cos\gamma) = 0.$$

Und diese Gleichung kann, falls man mit $e^{-N\vartheta_2}$ multiplicirt, und die Grössen g, g_0 (15.) einführt, auch so geschrieben werden:

$$(\mathrm{F.})\qquad X_n(\mu_1, \varphi_1) g^{-N} + Y_n(\mu_1, \varphi_1) g_0^N = -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi} P_n(\cos\gamma).$$

Versetzt man nun andererseits den hier benutzten variablen Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ in das Innere der *andern* Kugel (τ_0), so wird man eine *zweite* Gleichung $(\mathrm{F}_0.)$ erhalten, welche aus (F.) dadurch entsteht, dass man die Grössen g, X mit g_0, Y vertauscht, und welche also lautet:

$$(\mathrm{F}_0.)\qquad Y_n(\mu_1, \varphi_1) g_0^{-N} + X_n(\mu_1, \varphi_1) g^N = -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi} P_n(\cos\gamma).$$

In all' diesen Formeln hat das $\cos\gamma$, wie aus (21.) ersichtlich ist, die Bedeutung:

$$(22.)\qquad \cos\gamma = \mu_1\mu_2 + \sqrt{1-\mu_1^2}\sqrt{1-\mu_2^2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

und dem entsprechend soll weiterhin gesetzt werden:

$$(23.)\qquad \begin{aligned} \cos\delta &= \mu\mu_2 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_2^2}\cos(\varphi - \varphi_2), \\ \cos\delta_0 &= \mu_0\mu_2 + \sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-\mu_2^2}\cos(\varphi_0 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Die Formeln (F.), (F_0.) sind von demselben Habitus wie die *früheren* Formeln (F.), (F_0.) p. 267, und liefern daher durch Auflösung nach den X und Y folgendes Resultat:

$$(24.)\quad \begin{aligned} X_n(\mu_1, \varphi_1) &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi}P_n(\cos\gamma)\frac{1-g_0^{2N}}{1-f^{2N}}g^N, \\ Y_n(\mu_1, \varphi_1) &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi}P_n(\cos\gamma)\frac{1-g^{2N}}{1-f^{2N}}g_0^N. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man die *beliebigen* Variablen μ_1, φ_1 in der einen Formel mit μ, φ, in der andern mit μ_0, φ_0 bezeichnet, und dabei die Notizen (22.), (23.) beachtet, sofort:

$$(25.)\quad \begin{aligned} X_n(\mu, \varphi) &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi}\frac{1-g_0^{2N}}{1-f^{2N}}g^N P_n(\cos\delta), \\ Y_n(\mu_0, \varphi_0) &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}}{2a}\frac{N}{2\pi}\frac{1-g^{2N}}{1-f^{2N}}g_0^N P_n(\cos\delta_0). \end{aligned}$$

Substituirt man schliesslich diese Werthe (25.) in die Formeln (17.), (18.), so erhält man:

$$(26.)\quad \begin{aligned} \eta &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}\cdot\psi\sqrt{\psi}}{8\pi a^2}\sum\frac{1-g_0^{2N}}{1-f^{2N}}Ng^N P_n(\cos\delta), \\ \eta_0 &= -\frac{\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}\cdot\psi_0\sqrt{\psi_0}}{8\pi a^2}\sum\frac{1-g^{2N}}{1-f^{2N}}Ng_0^N P_n(\cos\delta_0), \end{aligned}$$

und ferner:

$$(27.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= -\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}\sum\frac{1-g_0^{2N}}{1-f^{2N}}(gq)^N P_n(\mu_2), \\ \mathfrak{M}_0 &= -\mathfrak{m}_2\sqrt{\psi_2}\sum\frac{1-g^{2N}}{1-f^{2N}}(g_0q_0)^N P_n(\mu_2). \end{aligned}$$

Betrachtet man also diejenigen elektrischen Belegungen, welche auf den beiden Kugeln inducirt werden durch einen äussern elektrischen Massenpunct $\mathfrak{m}_2(\vartheta_2, \mu_2, \varphi_2, \psi_2)$, *unter der Voraussetzung, dass beide Kugeln zur Erde abgeleitet sind, so werden die Dichtigkeiten* η, η_0 *und die Gesammtmassen* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ *dieser Belegungen die in* (26.), (27.) *angegebenen Werthe haben. Dabei repräsentiren* q, q_0, f, *ferner* g, g_0 *und* $\cos\delta$, $\cos\delta_0$ *die in* (5.), (15.), (16.) *und in* (23.) *angegebenen Abbreviaturen.*

Auch wird man die von diesen elektrischen Belegungen auf irgend welchen Raumpunct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ *ausgeübten Potentiale* U *und* U_0 *sofort anzugeben im Stande sein. Denn es sind diese Potentiale durch die Formeln* (19.) *dargestellt, sobald man darin für die Functionen* X_n *und* Y_n *ihre Werthe* (24.) *substituirt hat.*

§ 4.
Die übrigen elektrostatischen Aufgaben.

Dass alle übrigen, die beiden Kugeln betreffenden elektrostatischen Aufgaben auf die soeben absolvirten *beiden Fundamentalaufgaben* reducirbar sind, ergiebt sich leicht, und mag durch folgendes Beispiel erläutert werden.

Die beiden Metallkugeln mögen isolirt sein, und mögen, während sie der inducirenden Einwirkung eines gegebenen elektrischen Massenpunctes $\mathfrak{m}_2(\vartheta_2, \mu_2, \varphi_2, \psi_2)$ *ausgesetzt sind,* (durch Hineinbringen irgend welcher positiven oder negativen Elektricitätsmengen) *bis zu gegebenen Spannungen* C *und* C_0 *geladen werden. Es sollen die Dichtigkeiten* η, η_0 *und die Gesammtmassen* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ *der unter diesen Umständen auf den beiden Kugeln sich etablirenden elektrischen Belegungen näher untersucht werden.*

Man kann die Lösung dieser Aufgabe unmittelbar erhalten durch Superposition der Lösungen der beiden früheren Aufgaben, d. i. der *ersten* und *zweiten* Aufgabe (§ 2 und § 3). Bezeichnet man nämlich die Lösung der *ersten* Aufgabe für den Augenblick mit η', η'_0, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'_0$, U', U'_0 und die der *zweiten* mit η'', η''_0, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}''_0$, U'', U''_0, so erhält man als die Lösung der *gegenwärtigen* Aufgabe die Formeln:

$$(28.)\qquad \begin{cases} \eta = \eta' + \eta'', \\ \eta_0 = \eta'_0 + \eta''_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'', \\ \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}'_0 + \mathfrak{M}''_0; \end{cases}$$

und:

$$(29.)\qquad \begin{cases} U = U' + U'', \\ U_0 = U'_0 + U''_0; \end{cases}$$

wie solches leicht zu verificiren ist.

§ 5.
Ueber die Theorie der magnetischen Induction.

Die früher behandelten hydrodynamischen Probleme können der Hauptsache nach reducirt werden auf die Berechnung des Geschwindigkeitspotentials Φ. Für dieses letztere erhielten wir mit Leichtigkeit die Formel [p. 118]:

$$(X.)\qquad \Phi = \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n e^{N\vartheta} + B_n e^{-N\vartheta}) P_n(\mu),$$

wo $\mu = \cos\omega$ und $N = n + \frac{1}{2}$ ist. Ebenso ergaben sich mit Leichtigkeit für die hier vorhandenen unbekannten Coefficienten A_n, B_n zwei

Systeme von Gleichungen [(10. a, b) p. 121], das eine von der Form:

$$(\mathrm{Y.})\quad \left\{\begin{array}{l} n\mathfrak{a}_n A_{n-1} + \mathfrak{b}_n A_n + \mathfrak{c}_n A_{n+1} \\ + n\mathfrak{d}_n B_{n-1} + \mathfrak{e}_n B_n + \mathfrak{f}_n B_{n+1} \end{array}\right\} = \mathfrak{g}_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots.),$$

das andere von derselben Form:

$$(\mathrm{Z.})\quad \left\{\begin{array}{l} n\mathfrak{A}_n A_{n-1} + \mathfrak{B}_n A_n + \mathfrak{C}_n A_{n+1} \\ + n\mathfrak{D}_n B_{n-1} + \mathfrak{E}_n B_n + \mathfrak{F}_n B_{n+1} \end{array}\right\} = \mathfrak{G}_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots.),$$

wo die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ *gegebene* Grössen vorstellen. Schwierigkeiten bereitete uns nur die *Auflösung* der beiden Systeme von Gleichungen, und zwar hauptsächlich deswegen, weil diese Gleichungen scheinbar zur Bestimmung jener Constanten A_n, B_n *unzureichend* sind*). Ausführlicher geschrieben, lauten nämlich z. B. die Gleichungen des Systems (Y.) folgendermassen:

$$(\mathfrak{y}_0.)\quad (0 + \mathfrak{b}_0 A_0 + \mathfrak{c}_0 A_1) + (0 + \mathfrak{e}_0 B_0 + \mathfrak{f}_0 B_1) = \mathfrak{g}_0,$$

$$(\mathfrak{y}_1.)\quad (1\mathfrak{a}_1 A_0 + \mathfrak{b}_1 A_1 + \mathfrak{c}_1 A_2) + (1\mathfrak{d}_1 B_0 + \mathfrak{e}_1 B_1 + \mathfrak{f}_1 B_2) = \mathfrak{g}_1,$$

$$(\mathfrak{y}_2.)\quad (2\mathfrak{a}_2 A_1 + \mathfrak{b}_2 A_2 + \mathfrak{c}_2 A_3) + (2\mathfrak{d}_2 B_1 + \mathfrak{e}_2 B_2 + \mathfrak{f}_2 B_3) = \mathfrak{g}_2,$$

$$(\mathfrak{y}_3.)\quad (3\mathfrak{a}_3 A_2 + \mathfrak{b}_3 A_3 + \mathfrak{c}_3 A_4) + (3\mathfrak{d}_3 B_2 + \mathfrak{e}_3 B_3 + \mathfrak{f}_3 B_4) = \mathfrak{g}_3,$$

etc. etc. etc.

und in analoger Weise werden die einzelnen Gleichungen ($\mathfrak{z}_0.$), ($\mathfrak{z}_1.$), ($\mathfrak{z}_2.$), ($\mathfrak{z}_3.$), ... des Systems (Z.) sich darstellen.

Wären nun die beiden Anfangsconstanten A_0, B_0 *bekannt*, so könnte man successive zuerst A_1, B_1 aus den beiden Gleichungen ($\mathfrak{y}_0.$), ($\mathfrak{z}_0.$), sodann A_2, B_2 aus ($\mathfrak{y}_1.$), ($\mathfrak{z}_1.$), sodann A_3, B_3 aus ($\mathfrak{y}_2.$), ($\mathfrak{z}_2.$) berechnen. U. s. w. U. s. w. Jene Anfangsconstanten A_0, B_0 sind aber *unbekannt*; *und es scheinen daher zur wirklichen Bestimmung der A, B noch zwei Gleichungen zu fehlen.* Diese beiden noch fehlenden Gleichungen werden durch den Umstand ersetzt, dass die für das Geschwindigkeitspotential Φ geltende Entwicklung (X.) *convergent* sein muss.

Der reguläre Weg zur Berechnung der A, B würde demgemäss etwa folgender sein: Man nehme zuvörderst A_0, B_0 willkürlich an, und bestimme, mittelst der Gleichungen (Y.), (Z.), die Grössen A_1, B_1, A_2, B_2, etc. etc., allgemein A_n, B_n *als Functionen von* A_0, B_0. Sodann bestimme man schliesslich die in diesen Functionen A_n, B_n enthaltenen willkürlichen Constanten A_0, B_0 *der* Art, dass die Reihe (X.) convergirt.

Die wirkliche Verfolgung dieses Weges erschien mir von so abschreckender Schwierigkeit, dass ich denselben zu betreten nicht ver-

*) Wie solches früher schon besprochen ist für einen gewissen *specielleren* Fall, vgl. p. 122, 123.

sucht habe. In der That habe ich die in Rede stehenden hydrodynamischen Probleme, abgesehen von einem ganz speciellen Fall (p. 122 bis 127), nach einer *wesentlich andern* Methode behandelt.

Auf genau dieselben Schwierigkeiten stösst man nun aber auch in andern Gebieten der Mathematischen Physik, wo es weniger leicht ist, dieselben durch andere Methoden zu umgehen, so z. B. in der *Theorie der Ausbreitung des elektrischen Stromes innerhalb eines von zwei Kugelflächen begrenzten Conductors*, und ebenso in der *Theorie der magnetischen Induction zweier Kugeln.* In der That handelt es sich auch in diesem Fall, wie später gezeigt werden soll, um die Auflösung zweier Systeme von Gleichungen von der Form (Y.), (Z.); *sodass also zur wirklichen Bestimmung der A, B wiederum noch zwei Gleichungen zu fehlen scheinen.* Und diese beiden noch fehlenden Gleichungen finden wiederum ihren Ersatz durch gewisse in der Natur des Problems liegende Convergenzbedingungen.

*Chwolson**) irrt, wenn er die beiden noch fehlenden Gleichungen *direct hinstellen* zu können glaubt. In der That sind die beiden von ihm zur Vervollständigung der Syteme (Y.), (Z.) hingestellten Gleichungen völlig illusorisch, nämlich nichts Anders als eine unmittelbare Consequenz aus jenen Systemen (Y.), (Z.). Und demgemäss dürfte z. B. auch die von *Chwolson*, auf Grund dieser Gleichungen, ausgeführte numerische Rechnung des sicheren Fundamentes entbehren.

Um näher hierauf eingehen zu können, mag zunächst an die *allgemeine Theorie der magnetischen Induction* erinnert werden.

Es handelt sich bei der *Poisson*'schen Theorie um die Ermittelung desjenigen *magnetischen Zustandes*, welcher in einem magnetisirbaren Körper $\mathfrak{K}$ (der z. B. aus weichem Eisen bestehen kann) durch äussere magnetische Kräfte inducirt wird. Das gegebene Potential dieser äusseren Kräfte mag V heissen, und kurzweg das *inducirende Potential* genannt werden. Die Frage nach der Beschaffenheit jenes magnetischen Zustandes zerfällt der Hauptsache nach in zwei Theile, nämlich erstens in die Berechnung der in dem Körper $\mathfrak{K}$ *inducirten magnetischen Momente* α, β, γ, und zweitens in die Berechnung desjenigen Potentials Q, welches der Körper seinerseits, nach Eintritt des in Rede stehenden magnetischen Zustandes, auf äussere und innere Puncte ausübt. Dieses Potential Q pflegt das *inducirte Potential* genannt

*) *Chwolson: Ueber das Problem der magnetischen Induction auf zwei Kugeln*, Schlömilch's Journal, Jahrg. 24, p. 40. Ein von *Kirchhoff* gegebenes Referat über diesen Aufsatz befindet sich in den Monatsberichten der Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, vom 4. April 1878, p. 269—276.

zu werden. Zwischen diesen Grössen α, β, γ und Q findet ein einfacher Zusammenhang statt. Wären nämlich α, β, γ bereits ermittelt, so würde das Potential Q für jeden beliebigen äussern oder innern Punct p den Werth haben:

$$(1.) \qquad Q(p) = \iiint_{\mathfrak{K}} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} + \beta \frac{\partial T}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ des Körpers $\mathfrak{K}$. Dabei bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines solchen Elementes, und T seine reciproce Entfernung vom Puncte p. Was nun die wirkliche Berechnung der vier Unbekannten α, β, γ, Q betrifft, so führt die *Poisson*'sche Theorie zu folgender Regel:

Man breite auf der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}$ eine beliebige Massenbelegung aus, bezeichne das Potential derselben auf äussere und innere Puncte mit Q, und bestimme sodann diese Massenbelegung in solcher Art, dass an jedweder Stelle der Oberfläche die Gleichung erfüllt ist:

$$(2.) \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial \nu}\right) + 4\pi\varkappa \frac{\partial (Q+V)}{\partial \nu} = 0,$$

wo $\varkappa$ eine der Substanz des Körpers eigenthümliche Constante vorstellt, während n und ν die äussere und innere Normale der Oberfläche bezeichnen.

Dies ausgeführt gedacht, repräsentirt alsdann Q das gesuchte inducirte Potential. Und gleichzeitig werden alsdann die gesuchten inducirten Momente α, β, γ an jeder Stelle (x, y, z) des Körpers $\mathfrak{K}$ die Werthe haben:

$$(3.) \quad \alpha = -\varkappa \frac{\partial (Q+V)}{\partial x}, \qquad \beta = -\varkappa \frac{\partial (Q+V)}{\partial y}, \qquad \gamma = -\varkappa \frac{\partial (Q+V)}{\partial z}.$$

Die Constante $\varkappa$ ist für jeden magnetischen Körper positiv, und für unmagnetische Körper Null. In Betreff dieser Sätze verweise ich auf die Vorlesungen meines Vaters über Magnetismus, Leipzig, bei Teubner, 1881. In der That ergeben sich die genannten Sätze ziemlich leicht aus den dortigen Formeln, p. 35. Auch sind meine Bezeichnungen genau dieselben wie dort.

Die vorhin erwähnte Massenbelegung der Körper-Oberfläche mag kurzweg die *fingirte Massenbelegung* genannt werden. *Leicht lässt sich zeigen, dass dieselbe durch die Fundamentalformel* (2.) *eindeutig bestimmt ist.* Existirten nämlich *zwei* Massenbelegungen von solcher Art, dass sowohl das Potential Q der *einen*, wie auch das Potential Q' der *andern* die Bedingung (2.) erfüllte, so würde sich hieraus für die Differenz $q = Q - Q'$ die Formel ergeben:

(4.) $$\frac{\partial q}{\partial n} + \frac{\partial q}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0,$$

(5.) $$\text{d. i. } (1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial q}{\partial \nu} + \frac{\partial q}{\partial n} = 0.$$

Nun ist aber nach (γ.) p. 41:

(6.) $$\iiint_{\mathfrak{K}} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2\right] dx dy dz = -\iint_{\mathfrak{K}} q \frac{\partial q}{\partial \nu} d\sigma;$$

in ähnlicher Weise ergiebt sich, falls man den *Aussenraum* des Körpers $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

(7.) $$\iiint_{\mathfrak{A}} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2\right] dx dy dz = -\iint_{\mathfrak{K}} q \frac{\partial q}{\partial n} d\sigma;$$

wo n und ν dieselben Bedeutungen haben, wie in (2.), (4.), (5.). Multiplicirt man die Gleichungen (6.), (7.) resp. mit $(1 + 4\pi\varkappa)$ und 1, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (5.) sofort:

(8.) $$(1 + 4\pi\varkappa) \iiint_{\mathfrak{K}} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] dx dy dz + \iiint_{\mathfrak{A}} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] dx dy dz = 0.$$

Beachtet man nun, dass $\varkappa$ *positiv* ist, so ergiebt sich aus (8.) nach bekannter Schlussweise, dass q überall *constant* ist, oder, weil q (seiner Bedeutung zufolge) für die unendlich fernen Puncte verschwindet, dass dasselbe allenthalben *gleich Null* ist. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Bezeichnet man die Dichtigkeit der *fingirten Massenbelegung* mit η, so lässt sich die Fundamentalformel (2.) auch so schreiben:

(9.) $$-4\pi\eta + 4\pi\varkappa \frac{\partial(Q + V)}{\partial \nu} = 0.$$

Hieraus folgt sofort:

(10.) $$\iint_{\mathfrak{K}} \eta d\sigma = \varkappa \iint_{\mathfrak{K}} \frac{\partial(Q + V)}{\partial \nu} d\sigma.$$

Nun befinden sich aber die die Potentiale V und Q erzeugenden Massen theils *ausserhalb* $\mathfrak{K}$, theils *auf der Oberfläche* σ des Körpers $\mathfrak{K}$; und hieraus folgt, dass das in (10.) auf der *rechten* Seite stehende Integral $= 0$ ist. Demgemäss ergiebt sich also:

(11.) $$\iint_{\mathfrak{K}} \eta d\sigma = 0.$$

Die Gesammtmasse der fingirten Belegung ist somit stets $= 0$.

Zweite Bemerkung. — Die im Körper $\mathfrak{K}$ inducirten magnetischen *Gesammtmomente*, d. i. die Integrale:

(12.) $$\mathsf{A} = \iiint_{\mathfrak{K}} \alpha dx dy dz, \quad \mathsf{B} = \iiint_{\mathfrak{K}} \beta dx dy dz, \quad \Gamma = \iiint_{\mathfrak{K}} \gamma dx dy dz$$

sind in einfacher Weise darstellbar mittelst der fingirten Massenbelegung. In der That kann das Integral A, nach (3.), auch so geschrieben werden:

$$\mathsf{A} = -\varkappa \iiint_{\mathfrak{K}} \frac{\partial[Q + V]}{\partial x} dx dy dz,$$

oder, unter Anwendung des früher [(β.) p. 41] eingeführten Symbols (F, G), auch so:

$$\mathsf{A} = -\varkappa \iiint_{\mathfrak{K}} \big([Q+V], x\big)\, dx dy dz,$$

oder mit Rücksicht auf die Sätze (γ.), (γ'.) p. 41 auch so:

$$(13.)\qquad \mathsf{A} = \varkappa \iint_{\mathfrak{K}} [Q+V] \frac{\partial x}{\partial \nu}\, d\sigma = \varkappa \iint_{\mathfrak{K}} \frac{\partial [Q+V]}{\partial \nu}\, x d\sigma,$$

wo ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale vorstellt. Nimmt man für A den *letzten* der Ausdrücke (13.), so erhält man, mit Rücksicht auf (9.), die erste Formel des folgenden Systems:

$$(14.\qquad \mathsf{A} = \iint_{\mathfrak{K}} \eta x d\sigma, \quad \mathsf{B} = \iint_{\mathfrak{K}} \eta y d\sigma, \quad \Gamma = \iint_{\mathfrak{K}} \eta z d\sigma,$$

dessen beide andere Formeln sich in analoger Weise ergeben. *Diese Formeln* (14.) *zeigen, dass die in dem Körper inducirten magnetischen Gesammtmomente identisch sind mit den Momenten der an der Oberfläche des Körpers fingirten Massenbelegung.*

§ 6.

Anwendung der Theorie auf eine Kugel.

Es wird angemessen sein, diese schon von *Poisson* ausgeführte Anwendung der Theorie hier in Kürze zu wiederholen; weil die betreffenden Formeln für unsere weitern Betrachtungen unentbehrlich sind.

Nimmt man den Mittelpunct der *gegebenen Kugel*, die etwa aus weichem Eisen bestehen mag, zum Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems (x, y, z), und setzt man

$$\text{(f.)}\qquad \begin{aligned} x &= r\cos w &&= rm, \\ y &= r\sin w\cos\varphi &&= r\sqrt{1-m^2}\cos\varphi, \\ z &= r\sin w\sin\varphi &&= r\sqrt{1-m^2}\sin\varphi, \end{aligned}$$

wo also m zur Abkürzung steht für $\cos w$, so wird sich das *gegebene Potential* V der von Aussen her auf die Kugel einwirkenden Kräfte für jedweden Punct (r, m, φ) *innerhalb* der Kugel darstellen lassen durch eine Reihe von der Form:

$$(15.)\qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n Y_n(m, \varphi), \quad (r < R),$$

wo Y_n eine allgemeine Kugelfunction n^{ter} Ordnung vorstellt.

Es handelt sich also darum, auf dieser Kugelfläche eine noch unbekannte Massenbelegung auszubreiten, von solcher Beschaffenheit, dass ihr Potential Q der Bedingung (2.) entspricht:

$$(16.)\qquad \frac{\partial Q}{\partial n} + (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial Q}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0.$$

Wie man nun diese unbekannte Massenbelegung vorläufig auch wählen mag, stets wird ihr Potential Q auf irgend einen Punct (r, m, φ) die Gestalt besitzen:

$$(17.\,\mathrm{i})\qquad Q = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} Z_n(m, \varphi), \quad \text{falls } r < R \text{ ist,}$$

und die Gestalt:

$$(17.\,\mathrm{a})\qquad Q = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} Z_n(m, \varphi), \quad \text{falls } r > R \text{ ist.}$$

Dabei bezeichnet R den Radius der Kugelfläche, und Z_n eine noch unbekannte Kugelfunction n^{ter} Ordnung. Es handelt sich also nur noch darum, diese Functionen Z_n so zu bestimmen, dass der Bedingung (16.) entsprochen wird. — Da ν die *innere*, und n die äussere Normale der Kugelfläche vorstellt, so ergiebt sich einerseits aus (15.) und (17. i):

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\sum n R^{n-1} Y_n(m, \varphi),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu} = -\sum \frac{n}{R^2} Z_n(m, \varphi),$$

und andererseits aus (17. a):

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = -\sum \frac{n+1}{R^2} Z_n(m, \varphi).$$

Dies aber in (16.) substituirt, erhält man sofort:

$$\left(\frac{n+1}{R^2} + (1 + 4\pi\varkappa)\frac{n}{R^2}\right) Z_n(m, \varphi) + 4\pi\varkappa\, n R^{n-1} Y_n(m, \varphi) = 0;$$

mithin:

$$Z_n(m, \varphi) = -\frac{4\pi\varkappa \cdot n R^{n+1}}{(n+1) + n(1 + 4\pi\varkappa)} Y_n(m, \varphi),$$

oder, falls man zur Abkürzung

$$(18.)\qquad 4\pi\varkappa = \lambda, \quad \text{und} \quad \frac{1}{2 + 4\pi\varkappa} = \frac{1}{2 + \lambda} = \delta$$

setzt:

$$Z_n(m, \varphi) = -\frac{n\lambda\delta R^{n+1}}{n + \delta} Y_n(m, \varphi).$$

Somit ergiebt sich aus (17. i, a):

$$(19.\,\mathrm{i})\qquad Q = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\lambda\delta}{n+\delta} r^n Y_n(m, \varphi), \quad \text{falls } r < R;$$

$$(19.\,\mathrm{a})\qquad Q = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\lambda\delta}{n+\delta} R^{2n+1} \frac{Y_n(m, \varphi)}{r^{n+1}}, \quad \text{falls } r > R.$$

Also der Satz: *Hat das Potential V der von Aussen her auf die Kugel einwirkenden Kräfte für die innerhalb der Kugel liegenden Puncte*

(r, m, φ) den Werth (15.), *so wird das sogenannte inducirte Potential Q die in* (19. i, a) *angegebenen Werthe besitzen, wobei λ und δ zur Abkürzung gesetzt sind für die in* (18.) *erwähnten Constanten.*

Wird z. B. das *inducirende* Potential V hervorgebracht durch einen irgendwo ausserhalb der Kugel befindlichen magnetischen Massenpunct $\mathfrak{m}_1(r_1, m_1, \varphi_1)$, ist mithin:

$$(20.)\quad V = \mathfrak{m}_1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{r_1^{\,n+1}} P_n(\cos\gamma), \quad \text{wo}\cos\gamma = mm_1 + \sqrt{1-m^2}\sqrt{1-m_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1),$$

so erhält man für das *inducirte* Potential Q die Werthe:

$$(21.\,\mathrm{i})\qquad Q = -\,\mathfrak{m}_1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\lambda\delta}{n+\delta}\, \frac{r^n}{r_1^{\,n+1}}\, P_n(\cos\gamma), \quad \text{falls } r < R,$$

$$(21.\,\mathrm{a})\qquad Q = -\,\mathfrak{m}_1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\lambda\delta}{n+\delta}\, \frac{R^{2n+1}}{r_1^{\,n+1} r^{n+1}}\, P_n(\cos\gamma), \quad \text{falls } r > R.$$

§ 7.

Ueber magnetische Bilder.

Ob der Begriff des *magnetischen Bildes* bereits von irgend einem Autor eingeführt, resp. untersucht ist, weiss ich nicht zu sagen. Jedenfalls schliesst sich derselbe an die im vorhergehenden § reproducirte *Poisson*'sche Theorie in einfacher Weise an, vorausgesetzt, dass man diesen Begriff in ähnlicher Weise definirt, wie in der Theorie der Elektrostatik den Begriff der *elektrischen Bilder.*

Ist nämlich irgend ein Körper $\mathfrak{K}$ (der z. B. aus weichem Eisen bestehen kann) unter dem Einfluss eines äussern magnetischen Massenpunctes $\mathfrak{m}_1$ in einen magnetischen Zustand versetzt worden, so verstehe ich unter dem magnetischen Bilde von $\mathfrak{m}_1$ dasjenige innerhalb $\mathfrak{K}$ zu construirende Punctsystem, welches mit dem Körper $\mathfrak{K}$ in Bezug auf alle äussern Puncte äquipotential ist. Will man also z. B., was die im vorhergehenden § betrachtete *Kugel* betrifft, das *magnetische Bild* des Punctes $\mathfrak{m}_1$ haben, so hat man innerhalb dieser Kugel $\mathfrak{K}$ ein Punctsystem zu construiren, dessen Potential auf beliebige äussere Puncte (r, m, φ) identisch ist mit dem in (21. a) angegebenen Potential Q. Hierzu aber dient folgendes Verfahren:

Es ist $\varkappa$ eine *positive* Constante, also δ [vgl. (18.)] ein *positiver ächter Bruch*; und demgemäss ist in (21. a) der erste unter dem Summenzeichen stehende Factor auch so darstellbar:

$$\frac{n\lambda\delta}{n+\delta} = n\lambda\delta \int_0^\infty e^{-(n+\delta)\xi}\, d\xi.$$

Dies in (21. a) substituirt, erhält man:

$$(22.)\qquad Q = -\mathfrak{m}_1 \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} n\lambda\delta \frac{R^{2n+1}}{r_1^{n+1}\, r^{n+1}} e^{-n\xi} P_n(\cos\gamma) \right\} e^{-\delta\xi} d\xi.$$

Denkt man sich nun den zu $\mathfrak{m}_1(r_1, m_1, \varphi_1)$ *conjugirten* Punct (r_2, m_1, φ_1) construirt, so ist $r_1 r_2 = R^2$, mithin $\frac{1}{r_1} = \frac{r_2}{R^2}$. Dies in (22.) substituirt, ergiebt sich:

$$(23.)\qquad Q = -\mathfrak{m}_1 \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} n\lambda\delta \frac{r_2^{n+1}}{R r^{n+1}} e^{-n\xi} P_n(\cos\gamma) \right\} e^{-\delta\xi} d\xi.$$

Führt man jetzt, statt ξ, eine neue Integrationsvariable ϱ ein, indem man setzt:

$$r_2 e^{-\xi} = \varrho, \quad \text{mithin: } d\xi = -\frac{d\varrho}{\varrho},$$

so erhält man:

$$(24.)\qquad Q = -\mathfrak{m}_1 \frac{\lambda\delta r_2}{R} \int_0^{r_2} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma) \right\} \left(\frac{\varrho}{r_2}\right)^\delta \frac{d\varrho}{\varrho},$$

wo der in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck eine einfache geometrische Bedeutung besitzt. Construirt man nämlich vom Kugelcentrum c aus den die Puncte 2 und 1 enthaltenden Strahl $c21$, dessen Richtung den Argumenten (m_1, φ_1) entspricht, markirt man ferner auf diesem Strahl einen Punct mit den Coordinaten $(\varrho, m_1, \varphi_1)$, und versteht man endlich unter T die reciproce Entfernung dieses Punctes $(\varrho, m_1, \varphi_1)$ von dem betrachteten, beliebig gelegenen *äussern* Punct (r, m, φ), so ist:

$$T = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma),$$

mithin:

$$\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma),$$

wo der $\cos\gamma$ genau dieselbe Bedeutung wie bisher besitzt [vgl. (20)]. Hierdurch aber gewinnt der Ausdruck (24.) die Gestalt:

$$(25.)\qquad Q = -\mathfrak{m}_1 \frac{\lambda\delta r_2}{R} \int_0^{r_2} \frac{\partial T}{\partial\varrho} \left(\frac{\varrho}{r_2}\right)^\delta d\varrho,$$

oder, mittelst partieller Integration, auch folgende Gestalt:

$$(26.)\qquad Q = -\mathfrak{m}_1 \frac{\lambda\delta r_2}{R} \left\{ T_2 - \delta r_2^{-\delta} \int_0^{r_2} T\varrho^{\delta-1} d\varrho \right\},$$

wo T, nach wie vor, die reciproce Entfernung des Punctes $(\varrho, m_1, \varphi_1)$ von dem *äussern* Puncte (r, m, φ) vorstellt, während insbesondere T_2

die reciproce Entfernung des *speciellen* Punctes (r_2, m_1, φ_1) von jenem äussern Puncte bezeichnet.

Die Formel (26.) *giebt unmittelbar Auskunft über das gesuchte magnetische Bild des Punctes* $\mathfrak{m}_1$. *Bezeichnet man nämlich das Centrum der Kugel mit c, und den zu* $\mathfrak{m}_1$ *conjugirten Punct kurzweg mit* 2, *so wird jenes magnetische Bild, der Formel* (26.) *zufolge, theils aus einem in* 2 *befindlichen einzelnen Massenpunct, theils aus einer von c bis* 2 *sich erstreckenden materiellen Linie bestehen. Und zwar ist, nach der genannten Formel, die Masse jenes einzelnen Punctes*

$$(A.) \qquad = -\,\mathfrak{m}_1 \frac{\lambda \delta r_2}{R},$$

und andererseits die Dichtigkeit jener materiellen Linie an der Stelle ϱ:

$$(B.) \qquad = +\,\mathfrak{m}_1 \frac{\lambda \delta \delta}{R} \left(\frac{r_2}{\varrho}\right)^{1-\delta}.$$

Dabei bezeichnet ϱ *den Abstand der betrachteten Stelle vom Centrum c; ebenso* r_2 *den Abstand des Punctes* 2 *von c, ferner R den Kugelradius; während* λ, δ *die in* (18.) *genannten Constanten vorstellen.*

Bemerkung. — *Unendlich stark magnetisch* werden wir einen idealen Körper nennen, für welchen $\varkappa = \infty$, also [nach (18.)] λ ebenfalls $= \infty$, ferner $\delta = 0$, und $\lambda\delta = 1$ ist. Man könnte glauben, dass für eine solche unendlich stark magnetische Kugel das durch (A.) und (B.) dargestellte *magnetische Bild* in das bekannte *elektrische Bild* sich verwandelt. Denn für $\lambda\delta = 1$ und $\delta = 0$ geht der Ausdruck (A.) über in $-\,\mathfrak{m}_1 \frac{r_2}{R}$, während gleichzeitig der Ausdruck (B.) zu verschwinden scheint. — In Wirklichkeit ist das aber *nicht* der Fall, wie man schon daraus erkennt, *dass die Gesammtmasse der durch* (B.) *dargestellten materiellen Linie stets ebenso gross ist, wie die Masse des in* (A.) *genannten einzelnen Punctes* (abgesehen vom Vorzeichen); was sich mittelst der elementaren Integralformel:

$$\int \varrho^{\delta-1} d\varrho = \frac{1}{\delta}\,\varrho^{\delta}$$

sofort ergiebt.

Etwas einfacher gestalten sich die Resultate, wenn der äussere inducirende Massenpunct $\mathfrak{m}_1$ unendlich nahe an die gegebene Kugel heranrückt. Denn alsdann wird 2 mit $\mathfrak{m}_1$ coincidiren, mithin $r_2 = R$ werden; sodass also in diesem Fall z. B. die Formeln (25.), (26.) die Gestalt erhalten:

$$(27.) \qquad Q = -\,\mathfrak{m}_1 \cdot \lambda\delta \cdot \int_0^R \frac{\partial T}{\partial \varrho} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\delta} d\varrho,$$

$$(28.) \qquad Q = -\,\mathfrak{m}_1 \cdot \lambda\delta \left\{ T_2 - \delta R^{-\delta} \int_0^R T \varrho^{\delta-1} d\varrho \right\}.$$

Das magnetische Bild von $\mathfrak{m}_1$ besteht daher in diesem besondern Fall aus Massen, die den von c nach $\mathfrak{m}_1$ laufenden Kugelradius R bedecken. Der einzelne Punct liegt am Ende von R, und hat die Masse:

$$(A'.) \qquad - \mathfrak{m}_1 \lambda \delta;$$

während gleichzeitig die über diesen ganzen Radius R sich erstreckende materielle Linie an der Stelle ϱ die Dichtigkeit besitzt:

$$(B'.) \qquad + \mathfrak{m}_1 \frac{\lambda \delta \vartheta}{R} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{1-\delta}.$$

Bemerkung. — Mit (27.) resp. (28.) analoge Formeln lassen sich für das *inducirte* Potential Q auch dann aufstellen, wenn das *inducirende* Potential V ein ganz beliebig gegebenes ist. Wie nämlich dieses *inducirende* Potential V auch beschaffen sein mag, stets wird dasselbe, weil es von *äusseren* Massen herrühren soll, in Bezug auf *innere* Puncte ersetzbar sein durch das Potential einer gewissen auf der Kugelfläche ausgebreiteten Massenbelegung. Bezeichnet man nun die Dichtigkeit dieser Belegung im Kugelflächenelement $d\sigma_1$ mit ζ_1, so erhält man sofort für das zugehörige *inducirte* Potential Q den Werth:

$$(29.) \qquad Q = \iint \mathfrak{Q}_1 \zeta_1 d\sigma_1,$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $d\sigma_1$ der Kugelfläche. Dabei sind die Coordinaten von $d\sigma_1$ mit (R, m_1, φ_1) bezeichnet zu denken; und gleichzeitig ist dabei unter $\mathfrak{Q}_1$ der in (27.) oder (28.) angegebene Ausdruck, nach Fortlassung des Factors $\mathfrak{m}_1$, zu verstehen.

§ 8.

Anwendung der Theorie auf die gleichzeitige Magnetisirung zweier Körper.

Sind gleichzeitig *zwei* Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ der Einwirkung der gegebenen äussern Kräfte V ausgesetzt, so ist, ausser diesen Kräften, auch noch die *gegenseitige* Einwirkung der beiden Körper auf einander in Anschlag zu bringen. Bezeichnet man also die in den Körpern $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ inducirten Potentiale mit Q und Q_0, so wird z. B., was speciell den Gleichgewichtszustand des *ersten* Körpers $\mathfrak{K}$ betrifft, Q als das in $\mathfrak{K}$ *inducirte Potential*, und andererseits die Summe $(V + Q_0)$ als das von aussen her auf den Körper $\mathfrak{K}$ einwirkende Potential, d. h. als das *inducirende Potential* anzusehen sein. Mit Bezug auf diesen Körper $\mathfrak{K}$ nimmt daher unsere allgemeine Fundamentalformel (2.) p. 275 die Gestalt an:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial \nu}\right) + 4\pi\varkappa \frac{\partial (Q + Q_0 + V)}{\partial \nu} = 0.$$

Und in ähnlicher Weise ergiebt sich andererseits für den Gleichgewichtszustand des Körpers $\mathfrak{K}_0$ die analoge Formel:

$$\left(\frac{\partial Q_0}{\partial n} + \frac{\partial Q_0}{\partial \nu}\right) + 4\pi\varkappa_0 \frac{\partial(Q_0 + Q + V)}{\partial \nu} = 0.$$

Diese beiden Fundamentalformeln, in denen $\varkappa$ und $\varkappa_0$ die magnetischen Constanten der beiden Körper vorstellen, können, falls man

$$(1.)\qquad 4\pi\varkappa = \lambda \quad \text{und} \quad 4\pi\varkappa_0 = \lambda_0$$

setzt, auch so geschrieben werden:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial n} + (1+\lambda)\frac{\partial Q}{\partial \nu} + \lambda\frac{\partial(Q_0 + V)}{\partial \nu} &= 0, \\ \frac{\partial Q_0}{\partial n} + (1+\lambda_0)\frac{\partial Q_0}{\partial \nu} + \lambda_0\frac{\partial(Q + V)}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned}$$

wo selbstverständlich die n die *äussern* und die ν die *innern* Normalen der beiden Körper-Oberflächen vorstellen. Wir gelangen somit, was die gleichzeitige Induction *zweier* Körper durch ein *gegebenes* inducirendes Potential V betrifft, zu folgender Regel:

Man breite auf der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}$ eine beliebige Massenbelegung aus, deren Potential auf beliebige (äussere oder innere) Puncte Q heissen mag; desgleichen breite man auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}_0$ ebenfalls eine beliebige Massenbelegung aus, deren Potential Q_0 heissen mag; und bestimme sodann diese beiden Massenbelegungen in solcher Art, dass ihre Potentiale Q und Q_0 den beiden Fundamentalformeln (2.) *entsprechen.*

Dies ausgeführt gedacht, sind alsdann Q und Q_0 die gesuchten inducirten Potentiale. Und gleichzeitig werden alsdann die gesuchten inducirten Momente α, β, γ und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Werthe haben:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -\varkappa\frac{\partial(Q + Q_0 + V)}{\partial x}, \quad \beta = -\varkappa\frac{\partial(Q + Q_0 + V)}{\partial y}, \quad \gamma = \text{etc.} \\ \alpha_0 &= -\varkappa_0\frac{\partial(Q_0 + Q + V)}{\partial x}, \quad \beta_0 = -\varkappa_0\frac{\partial(Q_0 + Q + V)}{\partial y}, \quad \gamma_0 = \text{etc.} \end{aligned}$$

Ueberdiess werden [vgl. (1.) p. 275] *für jedweden Raumpunct p die Formeln stattfinden:*

$$(4.)\qquad \begin{aligned} Q(p) &= \iiint_{\mathfrak{K}} \left(\alpha\frac{\partial T}{\partial x} + \beta\frac{\partial T}{\partial y} + \gamma\frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \\ Q_0(p) &= \iiint_{\mathfrak{K}_0} \left(\alpha_0\frac{\partial T}{\partial x} + \beta_0\frac{\partial T}{\partial y} + \gamma_0\frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich wie früher lässt sich nun zeigen, dass jene beiden Massenbelegungen, die sogenannten *fingirten Belegungen* durch die Fundamentalformeln (2.) in *eindeutiger* Weise bestimmt sind. Sind ferner η und η_0 die Dichtigkeiten der beiden fingirten Belegungen, so ergeben sich, auf demselben Wege wie früher (p. 276), die Gleichungen:

$$\int_{\mathfrak{K}} \eta d\sigma = 0, \tag{5.}$$
$$\int_{\mathfrak{K}_0} \eta_0 d\sigma_0 = 0,$$

welche aussagen, *dass bei jeder der beiden fingirten Belegungen die Gesammtmasse* $= 0$ *ist.* Was endlich die in den beiden Körpern inducirten magnetischen Gesammtmomente

$$\mathsf{A} = \iiint_{\mathfrak{K}} \alpha dx dy dz, \quad \mathsf{B} = \iiint_{\mathfrak{K}} \beta dx dy dz, \quad \Gamma = \text{etc.}, \tag{6.}$$
$$\mathsf{A}_0 = \iiint_{\mathfrak{K}_0} \alpha_0 dx dy dz, \quad \mathsf{B}_0 = \iiint_{\mathfrak{K}_0} \beta_0 dx dy dz, \quad \Gamma_0 = \text{etc.}$$

betrifft, so ergeben sich, und zwar wieder auf demselben Wege wie früher (p. 277), die Formeln:

$$\mathsf{A} = \iint_{\mathfrak{K}} \eta x d\sigma, \quad \mathsf{B} = \iint_{\mathfrak{K}} \eta y d\sigma, \quad \Gamma = \iint_{\mathfrak{K}} \eta z d\sigma, \tag{7.}$$
$$\mathsf{A}_0 = \iint_{\mathfrak{K}_0} \eta_0 x_0 d\sigma_0, \quad \mathsf{B}_0 = \iint_{\mathfrak{K}_0} \eta_0 y_0 d\sigma_0, \quad \Gamma_0 = \iint_{\mathfrak{K}_0} \eta_0 z_0 d\sigma_0,$$

welche aussagen, *dass die in den Körpern inducirten Gesammtmomente nichts Anderes sind, als die magnetischen Momente der auf den Oberflächen der beiden Körper fingirten Massenbelegungen.*

§ 9.

Anwendung der Theorie auf zwei Kugeln.

Die beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ mögen zwei *Kugeln* sein, begrenzt von irgend zwei Kugelflächen des dipolaren Systems, mit den Parametern τ und τ_0; und zwar sei:

$$\tau = pos., \quad \text{andererseits} \quad \tau_0 = neg.; \tag{8.}$$

sodass also die Grössen:

$$q = e^{-\tau}, \quad \text{ferner} \quad q_0 = e^{\tau_0}, \quad \text{und} \quad f = qq_0 = e^{\tau_0 - \tau} \tag{9.}$$

lauter *positive ächte Brüche* vorstellen. Die einfache und anschauliche geometrische Bedeutung dieser Grössen q, q_0, f ist früher dargelegt worden [vgl. (σ.) p. 205].

Ferner mag angenommen werden, dass das gegebene Potential V der inducirenden äussern Kräfte *symmetrisch* ist in Bezug auf die x-Axe, d. i. in Bezug auf die Centrallinie der beiden Kugeln. *Dieselbe Symmetrie* wird alsdann offenbar auch vorhanden sein bei den in diesen Kugeln durch jene Kräfte *inducirten Zuständen*, also z. B. bei den *inducirten Momenten* α, β, γ und α_0, β_0, γ_0, ferner bei den *Potentialen* Q und Q_0, und ferner auch bei jenen auf den beiden Kugeloberflächen zu fingirenden, die Potentiale Q und Q_0 erzeugenden *Massenbelegungen*,

deren Dichtigkeiten η und η_0 heissen mögen. Denkt man sich also die Potentiale V, Q, Q_0 und die Dichtigkeiten η, η_0 als Functionen der dipolaren Coordinaten dargestellt, so werden all' diese Functionen *unabhängig sein vom Azimuth* φ.

Demgemäss besitzt z. B. die auf der Kugelfläche (τ) zu fingirende Massenbelegung im Puncte (τ, μ, φ, ψ) eine Dichtigkeit η, welche *lediglich von* μ *abhängt*:

$$\eta = f(\mu).$$

Gleiches gilt aber auch von der sogenannten vierten Coordinate jenes Punctes, nämlich von ψ; denn es ist:

$$\psi = e^\tau + e^{-\tau} - 2\mu, \qquad \text{[vgl. (15.) p. 104]},$$

mithin ψ, abgesehen von der gegebenen Constanten τ, *lediglich eine Function von* μ. Gleiches wird daher z. B. auch gelten von dem Quotienten $\frac{2a\eta}{\psi\sqrt{\psi}}$, wo $2a$ eine Constante, nämlich den gegenseitigen Abstand der beiden Pole des dipolaren Systems vorstellt. Diese nur von μ abhängende Function:

$$\frac{2a\eta}{\psi\sqrt{\psi}} = F(\mu)$$

mag nun entwickelt gedacht werden nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$:

$$\frac{2a\eta}{\psi\sqrt{\psi}} = F(\mu) = \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \mathfrak{A}_n P_n(\mu);$$

wo alsdann die $\mathfrak{A}$ noch *unbekannte Constanten* vorstellen. Giebt man dieser letzten Formel die Gestalt:

$$(\alpha.) \qquad \eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \mathfrak{A}_n P_n(\mu);$$

bezeichnet man ferner die *Gesammtmasse* der hier betrachteten Massenbelegung mit $\mathfrak{M}$, und das von ihr auf einen beliebigen Punct (ϑ_1, μ_1, φ_1, ψ_1) ausgeübte Potential mit $Q = Q(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$, so gelangt man, mit Rücksicht auf (6.), (7.), (8.) p. 266, sofort zu folgenden weiteren Formeln:

$$(\beta.) \qquad \mathfrak{M} = 2a \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \frac{2\pi}{N} \mathfrak{A}_n q^N,$$

$$\left(\gamma.\ \tfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{a}}\right) \qquad Q(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1) = \sqrt{\psi_1} \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \frac{2\pi}{N} \mathfrak{A}_n e^{\pm N(\tau-\vartheta_1)} P_n(\mu_1),$$

wo die beigesetzte Signatur $\left(\gamma.\ \tfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{a}}\right)$ andeuten soll, dass im Exponenten $\pm N(\tau - \vartheta_1)$ das *obere* oder *untere* Vorzeichen zu nehmen ist, je nach-

dem der Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche (τ) liegt. Führt man statt der $\mathfrak{A}$ etwas andere Constanten A ein, indem man setzt:

$$\frac{2\pi}{N}\mathfrak{A}_n e^{N\tau} = \frac{2\pi}{N}\mathfrak{A}_n q^{-N} = A_n, \qquad \text{[vgl. (9.)]},$$

und bezeichnet man überdiess den variablen Punct $(\vartheta_1, \mu_1, \varphi_1, \psi_1)$ kürzer mit $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$, so nehmen die Formeln $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $\left(\gamma. \frac{\text{i}}{\text{a}}\right)$ folgende Gestalt an:

$$(10.) \qquad \eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}}{4\pi a}\sum A_n N q^N P_n(\mu),$$

$$(11.) \qquad \mathfrak{M} = 2a\sum A_n q^{2N},$$

$$(12.\ \text{i}) \qquad Q = Q(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum A_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu),$$

$$(12.\ \text{a}) \qquad \text{respective} = \sqrt{\psi}\sum A_n q^{2N} e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

die Summationen stets ausgedehnt über $n = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, wobei das grosse N lediglich als Abbreviatur dient für $n + \frac{1}{2}$.

Analoge Formeln gelten offenbar für die auf der *andern* Kugelfläche (τ_0) zu fingirende Massenbelegung. Sie lauten, falls man irgend einen Punct *auf* dieser Kugelfläche mit $(\tau_0, \mu_0, \varphi_0, \psi_0)$ bezeichnet, andererseits aber unter $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ einen variablen Punct versteht, der ganz nach Belieben innerhalb oder ausserhalb der Kugelfläche (τ_0) liegen darf, folgendermassen:

$$(13.) \qquad \eta_0 = \frac{\psi_0\sqrt{\psi_0}}{4\pi a}\sum B_n N q_0^N P_n(\mu_0),$$

$$(14.) \qquad \mathfrak{M}_0 = 2a\sum B_n q_0^{2N},$$

$$(15.\ \text{i}) \qquad Q_0 = Q_0(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum B_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

$$(15.\ \text{a}) \qquad \text{respective} = \sqrt{\psi}\sum B_n q_0^{2N} e^{-N\vartheta} P_n(\mu);$$

wo die B, ebenso wie die A, noch unbekannte Constanten vorstellen, und wo von den beiden Formeln (15. i) und (15. a) die *erste* oder *zweite* gilt, je nachdem der Punct $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche (τ_0) liegt.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, jene Constanten A und B in solcher Weise zu bestimmen, dass die Potentiale Q und Q_0 den Fundamentalformeln (2.) *entsprechen. Denn solches ausgeführt gedacht, werden alsdann Q und Q_0 die gesuchten inducirten Potentiale sein. Auch werden sich alsdann die gesuchten inducirten Momente α, β, γ und α_0, β_0, γ_0 sofort berechnen lassen mittelst der Formeln* (3.).

Bei Behandlung dieser Aufgabe wird offenbar für das *gegebene inducirende Potential* V ein bestimmter analytischer Ausdruck zu Grunde zu legen sein. Da nun die inducirenden Kräfte *äussere* sein sollen, oder (anders ausgedrückt), da die das Potential V erzeugenden Massen *ausserhalb* der beiden Kugeln liegen sollen, so wird dieses V z. B. für alle *innerhalb* der Kugelfläche (τ) liegenden Puncte (ϑ, μ, φ, ψ) ersetzbar sein durch das Potential einer gewissen Massenbelegung der genannten Kugelfläche, also folgende mit (12. i) analoge Gestalt besitzen:

$$(16.\,\mathrm{i})\qquad V = V(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum \mathsf{A}_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu), \quad [\text{innerhalb } (\tau)].$$

Desgleichen ergiebt sich, dass jenes gegebene Potential V für alle innerhalb der *andern* Kugelfläche (τ_0) befindlichen Puncte (ϑ, μ, φ, ψ) folgende mit (15. i) analoge Form besitzt:

$$(17.\,\mathrm{i})\qquad V = V(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum \mathsf{B}_n e^{N\vartheta} P_n(\mu), \quad [\text{innerhalb } (\tau_0)].$$

Und da V *gegeben* ist, so sind die hier auftretenden Constanten A, B als *gegebene Constanten* anzusehen. — Bevor wir an die Lösung der eigentlichen Aufgabe näher herantreten, mögen noch zwei Bemerkungen eingeschaltet werden.

Erste Bemerkung. — Für jede der fingirten Massenbelegungen ist die Gesammtmasse stets $= 0$, [vgl. (5.) p. 284]. Somit ergeben sich aus (11.) und (14.) für die unbekannten Constanten A, B folgende Formeln:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \sum A_n q^{2N} &= 0, \\ \sum B_n q_0^{2N} &= 0. \end{aligned}$$

Zweite Bemerkung. — Was die in der Kugel (τ) inducirten *magnetischen Gesammtmomente* A, B, Γ betrifft, so ist z. B. nach (7.) p. 284:

$$\mathsf{A} = \iint \eta x d\sigma,$$

die Integration ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ der Kugel (τ). Substituirt man hier für η, x, $d\sigma$ ihre analytischen Ausdrücke:

$$\eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}}{4\pi a}\sum A_n N q^N P_n(\mu), \quad [\text{nach } (10)],$$

$$x = a\,\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{\psi}, \quad [\text{nach } (11) \text{ p. } 102],$$

$$d\sigma = \frac{4a^2 d\mu d\varphi}{\psi^2}, \quad [\text{nach } (32.) \text{ p. } 108],$$

so folgt sofort:

$$\mathsf{A} = \frac{a^2}{\pi}\iint \left(\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{\psi\sqrt{\psi}}\sum A_n N q^N P_n(\mu)\right) d\mu\, d\varphi.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \sum e^{-N\tau} P_n(\mu), \quad \text{[nach (35. a, b) p. 110]},$$

also falls man nach τ differencirt, und beachtet, dass $\psi = e^\tau + e^{-\tau} - 2\mu$ ist:

$$-\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2\psi\sqrt{\psi}} = -\sum N e^{-N\tau} P_n(\mu),$$

also mit Rücksicht auf (9.):

$$\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{\psi\sqrt{\psi}} = 2\sum N q^N P_n(\mu.)$$

Dies in A substituirt, erhält man:

$$\mathsf{A} = \frac{2a^2}{\pi} \iint \left(\sum N q^N P_n(\mu)\right) \left(\sum A_n N q^N P_n(\mu)\right) d\mu d\varphi.$$

Die Integration ist zu erstrecken über $\mu = -1 \ldots +1$ und über $\varphi = 0 \ldots 2\pi$. Somit ergiebt sich mittelst der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen:

$$\mathsf{A} = \frac{2a^2}{\pi} \sum A_n (N q^N)^2 \frac{2\pi}{N} = 4a^2 \sum A_n N q^{2N}. \tag{19.}$$

Ferner ist nach (7.) p. 284:

$$\mathsf{B} = \iint \eta y d\sigma \quad \text{und} \quad \Gamma = \iint \eta z d\sigma.$$

Hieraus aber folgt, weil die Dichtigkeit η *symmetrisch* in Bezug auf die x-Axe ist, sofort:

$$\mathsf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma = 0. \tag{20.}$$

Mit (19.), (20.) analoge Ausdrücke ergeben sich für die in der *andern* Kugel (τ_0) inducirten Gesammtmomente A_0, B_0, Γ_0; sodass man im Ganzen folgende Formeln erhält:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= +4a^2 \sum A_n N q^{2N}, & \mathsf{B} &= 0, & \Gamma &= 0, \\ \mathsf{A}_0 &= -4a^2 \sum B_n N q_0^{2N}, & \mathsf{B}_0 &= 0, & \Gamma_0 &= 0. \end{aligned} \tag{21.}$$

Bei diesen Ausdrücken ist im Auge zu behalten, dass die x-Axe, nach welcher A und A_0 gerechnet sind, vom Pole $A'(-\infty)$ zum Pole $A(\infty)$, also vom Centrum der Kugel (τ_0) zu dem der Kugel (τ) läuft, vgl. (8.). Hiermit hängt das *entgegengesetzte* Vorzeichen in den Formeln (21.) zusammen.

Ich habe hier die Formeln (21.) nach der *Chwolson*'schen Methode entwickelt. Die *Kirchhoff*'sche Methode ist vielleicht noch einfacher. *Kirchhoff* geht aus von der Formel (4.)

$$Q(p) = \iiint_{\mathfrak{K}} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} + \beta \frac{\partial T}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx dy dz,$$

T die *reciproce* Entfernung des Volumelementes $dxdydz$ (dessen Coordinaten x, y, z sind) von dem *beliebig* zu wählenden Punct p vorstellt. Bezeichnet man diese Entfernung selber mit E, und die Coordinaten des Punctes p mit a, b, c, so folgt:

$$Q(p) = \iiint_{\mathfrak{K}} \frac{\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)}{E^3}\,dxdydz.$$

Lässt man jetzt den Punct p längs der positiven x-Axe ins Unendliche, oder wenigstens in exorbitante Entfernung rücken, so wird E für alle Volumelemente $dxdydz$ der Kugel nahezu *constant*, ferner $\frac{a-x}{E}$ nahezu $=1$, während $\frac{b-y}{E}$ und $\frac{c-z}{E}$ nahezu $=0$ werden; sodass man also mit grosser Annäherung erhält:

$$E^2 Q(p) = \iiint_{\mathfrak{K}} \alpha\,dxdydz, \quad \text{d. i.} = \mathsf{A}.$$

Diese Formel: $\mathsf{A} = E^2 Q(p)$ kann aber offenbar, weil der Punct p in superlativer Entfernung liegt, auch so geschrieben werden:

$$\text{(a.)} \qquad \mathsf{A} = (Ap)\,(A'p)\cdot Q(p),$$

wo (Ap) und $(A'p)$ die beiden Polabstände des Punctes p vorstellen. Sind nun $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ die dipolaren Coordinaten dieses auf der positiven x-Axe in superlativer Entfernung befindlichen Punctes p, so ist offenbar $\mu = 1$, ferner ϑ positiv und nahezu $=0$. Demgemäss ergiebt sich:

$$(Ap)\,(A'p) = \xi^2 = \frac{4a^2}{\psi} = \frac{4a^2}{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2}, \quad \text{[vgl. (25.) p. 105]},$$

und ferner:

$$Q(p) = \sqrt{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2}\;\sum A_n q^{2N} e^{N\vartheta}, \quad \text{[aus (12. a)]}.$$

Dies in (a.) substituirt, erhält man:

$$\text{(b.)} \qquad \mathsf{A} = \frac{4a^2 \sum A_n q^{2N} e^{N\vartheta}}{e^{\frac{\vartheta}{2}} - e^{-\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Lässt man jetzt schliesslich, um dieser nur näherungsweise gültigen Formel (b.) völlige Strenge zu verleihen, den Punct p längs der positiven x-Axe wirklich *ins Unendliche* rücken, mithin $\vartheta = 0$ werden, so verschwindet gleichzeitig Nenner und Zähler des Ausdrucks [der Zähler zufolge (18.)]. Nach bekannter Regel ist daher:

$$\text{(c.)} \qquad \mathsf{A} = \left\{ \frac{4a^2 \sum A_n N q^{2N} e^{N\vartheta}}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\vartheta}{2}} + e^{-\frac{\vartheta}{2}}\right)} \right\}_{\vartheta=0},$$

oder was dasselbe:

$$\text{(d.)} \qquad \mathsf{A} = 4a^2 \sum A_n N q^{2N};$$

was mit (21.) übereinstimmt.

§ 10.

Fortsetzung.

Es handelt sich um die Berechnung der noch unbekannten Constanten A, B. Diese sind so zu bestimmen, dass die für Q, Q_0 aufgestellten Werthe den beiden Fundamentalformeln (2.), d. i. den Gleichungen:

$$(22.)\qquad \frac{\partial Q}{\partial n}+\frac{\partial\left[(1+\lambda)Q+\lambda(Q_0+V)\right]}{\partial \nu}=0,\quad \text{auf der Fläche } (\tau),$$

$$(22.)_0\qquad \frac{\partial Q_0}{\partial n}+\frac{\partial\left[(1+\lambda_0)Q_0+\lambda_0(Q+V)\right]}{\partial \nu}=0,\quad \text{auf der Fläche } (\tau_0),$$

Genüge leisten, wo die n die *äussern*, die ν die *innern* Normalen der beiden Flächen vorstellen. Es wird ausreichend sein, die *eine* von diesen beiden Fundamentalformeln, etwa (22.), wirklich zu bilden. Denn alsdann wird sich die andere $(22.)_0$, der Symmetrie zufolge, von selber ergeben.

Auf der den Pol $A(\infty)$ umschliessenden Kugelfläche (τ) gelten für eine beliebige Function F die Formeln [vgl. (33.), p. 109]:

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dn}=\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\left(-\frac{\psi}{2a}\right),\quad \text{und}\quad \frac{\partial F}{\partial \nu}=\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{d\nu}=\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\psi}{2a},$$

oder genauer geschrieben die Formeln:

$$\frac{\partial F}{\partial n}=-\left(\frac{\psi}{2a}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau},\qquad \frac{\partial F}{\partial \nu}=+\left(\frac{\psi}{2a}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau}.$$

Demgemäss geht die Fundamentalformel (22.) über in:

$$(23.)\qquad \left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial \vartheta}-\frac{\partial\left[(1+\lambda)Q+\lambda(Q_0+V)\right]}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\tau}=0.$$

wo absichtlich das *erste* Q horizontal überstrichen ist. Unter diesem $\overline{Q}$ ist nämlich, wie aus (22.) ersichtlich, der Werth *ausserhalb* der Kugelfläche (τ) zu verstehen; während die übrigen in (23.) vorhandenen Grössen Q, Q_0, V die Werthe der betreffenden Potentiale *innerhalb* (τ) repräsentiren. Nach (12. a) ist daher:

$$(24.)\qquad \overline{Q}=\sqrt{\psi}\sum A_n q^{2N}e^{N\vartheta}P_n(\mu),$$

während andererseits aus (12. i), (16. i) und (15. a) folgt:

$$(25.)\qquad \begin{aligned} Q&=\sqrt{\psi}\sum A_n e^{-N\vartheta}P_n(\mu),\\ V&=\sqrt{\psi}\sum \mathsf{A}_n e^{-N\vartheta}P_n(\mu),\\ Q_0&=\sqrt{\psi}\sum B_n q_0^{2N}e^{-N\vartheta}P_n(\mu).\end{aligned}$$

Zur bequemern Rechnung mögen nun die Bezeichnungen A'_n, B'_n, C_n eingeführt werden:

$$(26.)\qquad \begin{cases} A'_n = A_n q^{2N}, \qquad B'_n = B_n q_0^{2N}, \\ C_n = (1+\lambda)A_n + \lambda(\mathsf{A}_n + B'_n); \end{cases}$$

auch mögen zur Abkürzung die Differenzen der A mit a, die der B mit b u. s. w. benannt werden, in folgender Weise:

$$(27.)\qquad \begin{cases} a_n = A_n - A_{n-1}, \quad a'_n = A'_n - A'_{n-1}, \quad \alpha_n = \mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1}, \\ b_n = B_n - B_{n-1}, \quad b'_n = B'_n - B'_{n-1}, \quad \beta_n = \mathsf{B}_n - \mathsf{B}_{n-1}, \\ c_n = C_n - C_{n-1}. \end{cases}$$

Alsdann folgt aus (24.), (25.) mit Rücksicht auf (26.) sofort:

$$(28.)\qquad \bar{Q} = \sqrt{\psi}\sum A'_n e^{N\vartheta} P_n(\mu),$$

$$(29.)\qquad (1+\lambda)Q + \lambda(V + Q_0) = \sqrt{\psi}\sum C_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu).$$

Differenzirt man aber diese beiden letzten Formeln nach ϑ, und verfährt man dabei nach Massgabe der früher aufgestellten allgemeinen Formeln (ζ.), (η.) p. 120, so erhält man:

$$(30.)\qquad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\sum\left(n a'_n e^{(N-1)\vartheta} - (n+1)a'_{n+1}e^{(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu),$$

$$(31.)\qquad \frac{\partial[(1+\lambda)Q + \lambda(V+Q_0)]}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\sum\left(-n c_n e^{-(N-1)\vartheta} + (n+1)c_{n+1}e^{-(N+1)\vartheta}\right)P_n(\mu),$$

wo die a'_n und c_n die in (27.) angegebenen Differenzen vorstellen. Substituirt man schliesslich die Werthe (30.), (31.) in die Fundamentalformel (23.), so gelangt man zu einer Formel, die auf der Kugelfläche (τ) für jedwedes μ gelten muss, und in welcher daher die Coefficienten der $P_n(\mu)$ *einzeln* $= 0$ sein müssen. In solcher Weise erhält man die Gleichung:

$$(32.)\qquad [n a'_n e^{(N-1)\tau} - (n+1)a'_{n+1}e^{(N+1)\tau}] + [n c_n e^{-(N-1)\tau} - (n+1)c_{n+1}e^{-(N+1)\tau}] = 0,$$

wo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$ Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{-(N+1)\tau}$, und beachtet, dass $e^{-\tau} = q$ ist (9.), so folgt:

$$(33.)\qquad [n a'_n q^2 - (n+1)a'_{n+1}] + [n c_n - (n+1)c_{n+1}q^2]q^{2N} = 0.$$

Und diese Gleichung nimmt, weil nach (26.), (27.)

$$C_n = (1+\lambda)A_n + \lambda(\mathsf{A}_n + B'_n),$$
$$c_n = (1+\lambda)a_n + \lambda(\alpha_n + b'_n)$$

ist, die Gestalt an:

$$(34.)\qquad \left\{\begin{aligned} &[n a'_n q^2 - (n+1)a'_{n+1}] \\ +\,(1+\lambda)\,&[n a_n - (n+1)a_{n+1}q^2]q^{2N} \\ +\,\lambda\,&[n \alpha_n - (n+1)\alpha_{n+1}q^2]q^{2N} \\ +\,\lambda\,&[n b'_n - (n+1)b'_{n+1}q^2]q^{2N} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Es bleibt noch übrig, in der *ersten* und *letzten* Zeile dieser Formel, die accentuirten Hülfsgrössen a', b' durch die eigentlichen Grössen a, b resp. A, B zu ersetzen. Nun ist nach (27.) und (26.):

$$a'_n = A'_n - A'_{n-1} = A_n q^{2N} - A_{n-1} q^{2N-2},$$

oder was dasselbe:

$$\begin{cases} a'_n = [A_n q^2 - A_{n-1}] q^{2N-2}, & \text{und folglich:} \\ a'_{n+1} = [A_{n+1} q^2 - A_n] q^{2N}. \end{cases}$$

Substituirt man hier für A_{n-1} und A_{n+1} die aus den Relationen

$$a_n = A_n - A_{n-1} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = A_{n+1} - A_n$$

entspringenden Werthe, so erhält man:

$$\begin{cases} a'_n = [A_n q^2 - (A_n - a_n)] q^{2N-2}, \\ a'_{n+1} = [(A_n + a_{n+1}) q^2 - A_n] q^{2N}; \end{cases}$$

oder anders geordnet:

$$(\varkappa.) \qquad \begin{cases} a'_n = [a_n \qquad - A_n(1 - q^2)] q^{2N-2}, \\ a'_{n+1} = [a_{n+1} q^2 - A_n(1 - q^2)] q^{2N}; \end{cases}$$

woraus für die *erste* Zeile der Formel (34.) folgender Ausdruck resultirt:

$$(\lambda.) \quad [n a'_n q^2 - (n+1) a'_{n+1}] = [n a_n - (n+1) a_{n+1} q^2] q^{2N} + A_n (1 - q^2) q^{2N}.$$

Völlig analog mit ($\varkappa$.) ergeben sich ferner die Relationen:

$$(\mu.) \qquad \begin{cases} b'_n = [b_n \qquad - B_n(1 - q_0^2)] q_0^{2N-2}, \\ b'_{n+1} = [b_{n+1} q_0^2 - B_n(1 - q_0^2)] q_0^{2N}; \end{cases}$$

und hieraus resultirt für den Ausdruck *vierter* Zeile in (34.) der Werth:

$$(\nu.) \quad [n b'_n - (n+1) b'_{n+1} q^2] = [n b_n - (n+1) b_{n+1} f^2 q_0^2] q_0^{2N-2} \\ - B_n (1 - q_0^2)[n - (n+1) f^2] q_0^{2N-2},$$

wo $f = q q_0$ ist; vgl. (9.). — Substituirt man schliesslich die Werthe (λ.), (ν.) in die Formel (34.), so folgt, falls man gleichzeitig die ganze Formel durch q^{2N} dividirt, und überdiess beachtet, dass $q_0^{2N-2} = q_0^{2n-1}$ ist:

$$(35.) \begin{Bmatrix} (2+\lambda)[n a_n - (n+1) a_{n+1} q^2] + A_n (1 - q^2) \\ + \lambda [n \alpha_n - (n+1) \alpha_{n+1} q^2] \\ + \lambda ([n b_n - (n+1) b_{n+1} f^2 q_0^2] - B_n (1 - q_0^2)[n - (n+1) f^2]) q_0^{2n-1} \end{Bmatrix} = 0.$$

Dies also ist diejenige Gestalt, welche die Bedingung (22.) schliesslich annimmt, sobald man in derselben für Q, Q_0, V ihre analytischen Ausdrücke substituirt. Und man übersieht nun sofort, dass die parallel stehende Bedingung $(22.)_0$ bei analogem Verfahren folgende analoge Gestalt annehmen wird:

$$(35.)_0 \left\{ \begin{array}{l} (2+\lambda_0)[nb_n-(n+1)b_{n+1}q_0^2]+B_n(1-q_0^2) \\ \quad +\lambda_0[n\beta_n-(n+1)\beta_{n+1}q_0^2] \\ \quad +\lambda_0([na_n-(n+1)a_{n+1}f^2q^2]-A_n(1-q^2)[n-(n+1)f^2])q^{2n-1} \end{array} \right\} = 0.$$

Diese für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ geltenden Gleichungen (35.), $(35.)_0$ enthalten theils *gegebne*, theils *unbekannte* Constanten. Die *ersteren* sind dargestellt durch die magnetischen Constanten λ, λ_0 [vgl. (1.) p. 283], ferner durch die von der Grösse und relativen Lage der beiden Kugeln abhängenden Constanten q, q_0, f; endlich durch die in dem gegebenen Potential V enthaltenen Constanten A_n, B_n [p. 287], und durch deren Differenzen $\alpha_n = (\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1})$, $\beta_n = (\mathsf{B}_n - \mathsf{B}_{n-1})$. Andererseits sind in die *unbekannten* Constanten dargestellt durch die in den unbekannten Potentialen Q, Q_0 auftretenden Constanten A_n, B_n [p. 286], und durch deren Differenzen $a_n = (A_n - A_{n-1})$, $b_n = (B_n - B_{n-1})$. Es wird zweckmässig sein, die a_n, b_n nur als *Abbreviaturen* für diese Differenzen anzusehen; *sodass also dann die in den Gleichungen* (35.), $(35.)_0$ *enthaltenen unbekannten Constanten lediglich die A_n, B_n sind.*

Was nun den eigentlichen und nicht gerade ganz leicht zu erkennenden *Charakter* der Gleichungen (35.), $(35.)_0$ betrifft, so ist im Auge zu behalten: *erstens*, dass die beiden Fundamentalformeln (22.), $(22.)_0$ wie besonders betont worden ist*), zur vollständigen und eindeutigen Lösung des magnetischen Problems, also zur vollständigen und eindeutigen Bestimmung der unbekannten Potentiale Q, Q_0 ausreichend sind; *zweitens*, dass diese Potentiale nothwendiger Weise darstellbar sein müssen durch die früher angegebenen, mit den noch unbekannten Constanten A_n, B_n behafteten Reihen [p. 286]; endlich *drittens*, dass die Gleichungen (35.), $(35.)_0$ schlechterdings *Alles* enthalten, was überhaupt aus jenen Fundamentalformeln (22.), $(22.)_0$ in Betreff der Constanten A_n, B_n eruirbar ist. Aus diesen drei Thatsachen folgt sofort, dass die Gleichungen (35.), $(35.)_0$ *ausreichend* sein müssen zur wirklichen Bestimmung der in jenen Reihen vorhandenen constanten Coefficienten A_n, B_n.

Dem scheint nun allerdings durch die *Form* dieser Gleichungen *widersprochen* zu werden. Denn dieselben haben, falls man für a_n und b_n ihre eigentlichen Bedeutungen $(A_n - A_{n-1})$ und $(B_n - B_{n-1})$ substituirt, die Gestalt der früher besprochenen Formeln (Y.), (Z.) p. 273; sodass also zur wirklichen Bestimmung der A_n, B_n noch *zwei* Gleichungen zu *fehlen* scheinen. Diese scheinbar noch fehlenden Gleichungen finden ihren Ersatz und müssen ihren Ersatz finden durch

*) Vgl. die letzten Zeilen auf p. 283.

den Umstand, dass die Reihenentwicklungen der Potentiale Q, Q_0 nicht divergent sein dürfen.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Die in den Entwicklungen der Potentiale Q, Q_0 [p. 286] vorhandenen Constanten A_n, B_n sind nothwendiger Weise vollständig und eindeutig bestimmt

(α.) . . . . . *durch die für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ geltenden Gleichungen* (35.), $(35.)_0$; *und daneben*

(β.) . . . . . *durch den Umstand, dass jene Entwicklungen convergent sein müssen.*

Denn wollte Jemand das Gegentheil behaupten, so würde er damit die Behauptung aussprechen, dass die Fundamentalformeln (22.), $(22.)_0$ p. 290 zur vollständigen und eindeutigen Lösung des magnetischen Problems unzureichend seien; — eine Behauptung, die sicherlich falsch ist.

Sehr erwünscht würde es sein, wenn man die Anforderung (β.) irgendwie abschütteln, und durch bequemere Bedingungen ersetzen könnte. Und ein solcher Ersatz scheint dargeboten zu sein durch die früher gefundenen Relationen

$$(\gamma.) \qquad \sum A_n q^{2N} = 0 \quad \text{und} \quad \sum B_n q_0^{2N} = 0, \qquad [\text{vgl. p. } 287].$$

Es entsteht also die Vermuthung, dass die Constanten A_n, B_n, statt durch (α.) und (β.), *vielleicht auch durch* (α.) *und* (γ.) bestimmt sein könnten. Das aber ist leider *nicht* der Fall. *In der That lässt sich zeigen, dass die Gleichungen* (γ.) *eine unmittelbare Consequenz aus den Gleichungen* (α.) *sind, und dass also jene A_n, B_n durch* (α.) *und* (γ.) *ebensowenig bestimmt sind, wie durch* (α.) *allein.*

Erster Beweis. — Wie schon bemerkt, repräsentiren die Gleichungen (α.), d. i. die Gleichungen (35.), $(35.)_0$ *Alles*, was überhaupt aus den beiden Fundamentalformeln (22.), $(22.)_0$ zur Bestimmung der A_n, B_n extrahirbar ist. Jene Gleichungen (γ.) entstammen aber derselben Quelle; denn sie entspringen aus der Thatsache, dass die Gesammtmasse einer jeden der beiden fingirten Belegungen $= 0$ ist; und diese Thatsache ihrerseits war eine Folge jener beiden Fundamentalformeln. Da nun die Gleichungen (α.) *Alles* repräsentiren, was überhaupt aus den Fundamentalformeln für A_n, B_n abzuleiten möglich ist, die Gleichungen (γ.) aber ebenfalls aus diesen Formeln abgeleitet sind; so müssen die Gleichungen (γ.) in den Gleichungen (α.) schon mitenthalten sein. — *Q. e. d.*

Zweiter Beweis. — *Die erste der Gleichungen* (α.), nämlich (35.) ist, falls man rückwärts geht, identisch mit (34.), ebenso mit (33.). In dieser früheren Gestalt (33.) lautet sie:

$$[na'_n q^2 - (n+1)a'_{n+1}] + [nc_n - (n+1)c_{n+1}q^2]q^{2n+1} = 0,$$

oder falls man n successive $= 0, 1, 2, 3, \ldots$ setzt:

$$\begin{aligned}
[0 - 1a'_1] + [0 - 1c_1q^2]q &= 0,\\
[1a'_1q^2 - 2a'_2] + [1c_1 - 2c_2q^2]q^3 &= 0,\\
[2a'_2q^2 - 3a'_3] + [2c_2 - 3c_3q^2]q^5 &= 0,\\
[3a'_3q^2 - 4a'_4] + [3c_3 - 4c_4q^2]q^7 &= 0,
\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Hieraus folgt durch Addition sofort:

$$(q^2 - 1)(1a'_1 + 2a'_2 + 3a'_3 + 4a'_4 + \ldots) = 0,$$

oder weil der erste Factor $q^2 - 1$, als von 0 verschieden, fortzulassen ist, und überdiess a'_n durch seine eigentliche Bedeutung $(A'_n - A'_{n-1})$ ersetzt werden kann:

$$\left\{\begin{array}{l} (A'_1 + 2A'_2 + 3A'_3 + 4A'_4 + \ldots) \\ -(A'_0 + 2A'_1 + 3A'_2 + 4A'_3 + \ldots) \end{array}\right\} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$-A'_0 - A'_1 - A'_2 - A'_3 - - \ldots = 0.$$

oder kürzer geschrieben:

$$\sum A'_n = 0,$$

die Summation, wie gewöhnlich ausgedehnt über $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Nun ist aber A'_n nur Abbreviatur für $A_n q^{2N}$ [vgl. (26.)]. Somit folgt:

$$\sum A_n q^{2N} = 0.$$

Und dies ist die *erste* der Gleichungen (γ.). *Somit haben wir gezeigt, dass diese erste der Gleichungen (γ.) eine unmittelbare Consequenz repräsentirt aus der ersten der Gleichungen (α.).* Dass dieselbe Beziehung obwaltet zwischen der *zweiten* Gleichung (γ.) und der *zweiten* Gleichung (α.) bedarf keiner Erläuterung. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Hiermit hängt der schon angedeutete Irrthum *Chwolson*'s zusammen, der darin besteht, dass die Gleichungen (γ.) als *unabhängig* von den Gleichungen (α.), und mit diesen Gleichungen (α.) zusammengenommen als *ausreichend* zur Bestimmung der A_n, B_n angesehen werden. Derselbe Irrthum ist auch übergegangen in das *Kirchhoff*'sche Referat. Dabei sei erwähnt, dass *Chwolson* und *Kirchhoff* die Gleichungen (α.), d. i. (35.), $(35.)_0$ in wesentlich *anderer* Gestalt geben, zu der man in folgender Weise übergehen kann.

Man führe statt der A, B, A, B *andere* Constanten ein: A^*, B^*, A^*, B^*, indem man setzt:

$$(36.) \qquad \begin{aligned} A_n &= A^*_n q^{-N}, & B_n &= B^*_n q_0^{-N},\\ \mathsf{A}_n &= \mathsf{A}^*_n q^{-N}, & \mathsf{B}_n &= \mathsf{B}^*_n q_0^{-N}. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun in (35.) zuvörderst die a_n, α_n, b_n durch ihre eigentlichen Bedeutungen $(A_n - A_{n-1})$, $(\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1})$, $(B_n - B_{n-1})$, und führt man hierauf [mittelst (36.)] statt der A, B, A, B, die *neuen* Constanten A^*, B^*, A^*, B^* ein, so nimmt die Gleichung (35.) die Gestalt an:

$$(37.)\quad \left\{\begin{array}{l} (2+\lambda)\left[nA^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q^2}{q}\right)A^*_n + (n+1)A^*_{n+1}\right] - \frac{1-q^2}{q}A^*_n \\ \quad +\lambda\left[n\mathsf{A}^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q^2}{q}\right)\mathsf{A}^*_n + (n+1)\mathsf{A}^*_{n+1}\right] \\ \quad +\lambda\left[\frac{n}{f}B^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q^2}{q}\right)B^*_n + (n+1)fB^*_{n+1}\right]f^{n+\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0;$$

während andererseits die parallelstehende Gleichung $(35.)_0$ bei gleichem Verfahren folgende Gestalt annimmt:

$$(37.)_0\quad \left\{\begin{array}{l} (2+\lambda_0)\left[nB^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q_0^2}{q_0}\right)B^*_n + (n+1)B^*_{n+1}\right] - \frac{1-q_0^2}{q_0}B^*_n \\ \quad +\lambda_0\left[n\mathsf{B}^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q_0^2}{q_0}\right)\mathsf{B}^*_n + (n+1)\mathsf{B}^*_{n+1}\right] \\ \quad +\lambda_0\left[\frac{n}{f}A^*_{n-1} - \left(\frac{n+(n+1)q_0^2}{q_0}\right)A^*_n + (n+1)fA^*_{n+1}\right]f^{n+\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0.$$

Dabei ist f stets $= qq_0$ [vgl. (9.), p. 284]. Und diese Formeln (37.), $(37.)_0$ repräsentiren, abgesehen von einer andern Bezeichnungsweise, die *Chwolson*'schen, und ebenso auch die *Kirchhoff*'schen Gleichungen. In der That geht z. B. die Formel (37.) genau über in die von *Kirchhoff* in den Berichten der Berliner Akad. der Wiss. (4. April, 1878, auf Seite 272 in Nr. 2) angegebene Formel, wenn man an Stelle von

$$\frac{2+\lambda}{\lambda},\quad \frac{1}{\lambda},\quad q,\quad q_0,\quad f,\quad A^*_n,\quad B^*_n,\quad \mathsf{A}^*_n,\quad \mathsf{B}^*_n,$$

respective die Bezeichnungen substituirt:

$$\tau,\quad \frac{\tau-1}{2},\quad \varrho_1,\quad \frac{1}{\varrho_2},\quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2},\quad A_n,\quad B_n,\quad C_n,\quad D_n.$$

Bei der Mühsamkeit der Rechnungen habe ich es für wichtig gehalten, die Resultate derselben durch eine solche Vergleichung in sorgfältiger Weise zu controliren.

§ 11.

Uebergang zu dem speciellen Fall nur einer Kugel.

Das im Vorhergehenden behandelte magnetische Problem ist in sofern ein sehr einfaches, als die allgemeinen Formen der inducirten Potentiale Q, Q_0 sich mit Leichtigkeit angeben lassen. Grosse Schwierigkeiten bereitet aber, wie im vorhergehenden § gezeigt ist, die Bestimmung der in diesen allgemeinen Formen enthaltenen constanten Coef-

ficienten A_n, B_n. Diese Schwierigkeiten werden bestehen bleiben, und ihr eigentlicher Kern wird noch deutlicher hervortreten, wenn wir gegenwärtig zu dem speciellen Fall nur *einer* Kugel uns hinwenden.

Der Uebergang zu diesem speciellen Fall kann entweder dadurch bewerkstelligt werden, dass man die Kugel (τ_0) als *unmagnetisch* betrachtet, mithin $\varkappa_0$ und λ_0 [vgl. (1.) p. 283] gleich *Null* setzt, oder am Einfachsten dadurch, dass man den *Radius* der Kugel (τ_0) zu *Null* macht, mithin das q_0 *verschwinden* lässt. [Vgl. die geometrische Bedeutung von q_0, p. 205 (σ.)]. Mittelst dieser letztern Operation geht die Formel (35.) p. 292 über in:

$$(1.)\quad \left\{\begin{matrix}(2+\lambda)[na_n-(n+1)a_{n+1}q^2]+A_n(1-q^2)\\ +\lambda\,[n\alpha_n-(n+1)\alpha_{n+1}q^2]\end{matrix}\right\}=0,\quad \text{wo: } n=0,1,2,3,\ldots$$

Man könnte zweifelhaft darüber sein, ob wirklich die letzte Zeile jener Formel (35.) *stets* fortfällt. Doch sieht man, dass solches der Fall ist, wenn man jene Formel (35.) für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach hinschreibt, und hierauf erst das q_0 verschwinden lässt.

Es handelt sich darum, mittelst dieser Gleichungen (1.) die in der Entwicklung

$$(2.\,\mathrm{i})\qquad Q = Q(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu),$$

[vgl. p. 286]

$$(2.\,\mathrm{a})\qquad \text{respective} = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n q^{2N} e^{N\vartheta} P_n(\mu)$$

enthaltenen unbekannten Constanten A_n zu berechnen, vorausgesetzt, dass das *inducirende* Potential

$$(3.\,\mathrm{i})\qquad V = V(\vartheta, \mu, \varphi, \psi) = \sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathsf{A}_n e^{-N\vartheta} P_n(\mu),\qquad [\text{vgl. p. } 287],$$

nebst seinen Constanten A_n, *gegeben* ist; wobei zu beachten, dass a_n und α_n nur Abbreviaturen sind resp. für $(A_n - A_{n-1})$ und $(\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1})$.

Dass die A_n durch die Gleichungen (1.), und durch die zu fordernde Convergenz der Reihen (2. i, a) *vollständig* und *eindeutig* bestimmt sind, geht aus unsern früheren Betrachtungen (vgl. den Satz p. 294) deutlich hervor. Will man aber diese Bestimmung der A_n wirklich ausführen, so stösst man wieder auf ähnliche Schwierigkeiten wie früher. Denn die Gleichungen (1.) sind von der Form:

$$(4.)\quad \begin{aligned}
&(2+\lambda)\,[0 &&- (A_1-A_0)q^2] + A_0(1-q^2) = G_0,\\
&(2+\lambda)\,[(A_1-A_0) &&- 2(A_2-A_1)q^2] + A_1(1-q^2) = G_1,\\
&(2+\lambda)\,[2(A_2-A_1) &&- 3(A_3-A_2)q^2] + A_2(1-q^2) = G_2,\\
&(2+\lambda)\,[3(A_3-A_2) &&- 4(A_4-A_3)q^2] + A_3(1-q^2) = G_3,\\
&\qquad\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}$$

wo die G *gegeben* sind, ebenso λ und q. Man müsste also, bei einem directen Versuch zur Auflösung, zuvörderst das A_0 noch willkührlich lassen, und mittelst der aufeinanderfolgenden Gleichungen successive $A_1, A_2, A_3, \ldots$ als Functionen von A_0 darstellen. Sodann müsste man schliesslich diese Werthe in die Reihen (2. i, a) substituiren, und jenes A_0 so bestimmen, dass diese Reihen *convergiren*.

Dieser directe Weg zur Auflösung der Gleichungen erscheint von abschreckender Schwierigkeit. Umsomehr dürfte es von Interesse sein, dass man die Auflösung derselben auf einem ganz *andern*, indirecten Wege wirklich zu geben vermag. Dieser indirecte Weg bietet sich fast von selber dar; er besteht darin, dass man das vorgelegte magnetische Problem zunächst löst mittelst der *monopolaren Coordinaten* (d. i. mittelst der gewöhnlichen Polarcoordinaten), und sodann diese Lösung transformirt in die *dipolaren Coordinaten*. Um näher hierauf einzugehen, müssen wir zuvörderst die betreffenden Formeln bei Zugrundelegung der *einen* und der *andern* Coordinaten nebeneinander stellen. Setzt man, was die monopolaren Coordinaten (r, m, φ) betrifft, das gegebene *inducirende* Potential

$$(5. \text{i}) \qquad V = \sum_{j=0}^{j=\infty} \mathsf{K}_j r^j P_j(m), \qquad \text{für } r < R,$$

wo die Coefficienten K beliebig gegebene Constanten vorstellen, so hat das *inducirte* Potential Q [vgl. p. 277, 278, (15.) und (19. i)] den Werth:

$$(6. \text{i}) \qquad Q = -\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} \mathsf{K}_j r^j P_j(m), \qquad \text{für } r < R,$$

wo R den Kugelradius vorstellt. Denkt man sich also für einen beliebigen Raumpunct (x, y, z) die monopolaren Coordinaten mit (r, m, φ) und die dipolaren Coordinaten mit $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ bezeichnet, und setzt man zur Abkürzung:

$$(7.) \qquad \mathfrak{B}_j = r^j P_j(m), \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_n = \sqrt{\psi} e^{-N\vartheta} P_n(\mu),$$

wo $N = n + \frac{1}{2}$ sein soll, so kann man die Formeln (5. i), (6. i) und andererseits die Formeln (2. i), (3. i) in folgender Weise nebeneinander stellen:

Ist das *inducirende* Potential V gegeben in der Form:

$$(8.) \qquad V = \sum_j \mathsf{K}_j \mathfrak{B}_j,$$

wo die K gegebene Constanten vorstellen, so wird das *inducirte* Potential Q den Werth haben:

Ist andererseits das *inducirende* Potential V gegeben in der Form:

$$V = \sum_n \mathsf{A}_n \mathfrak{W}_n,$$

wo die A gegebene Constanten vorstellen, so wird das *inducirte* Potential Q den Werth haben:

(9.) $Q = -\sum_j \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} K_j \mathfrak{B}_j,$ | $Q = \sum_n A_n \mathfrak{W}_n,$

wo λ und δ gegebene Constanten bezeichnen [vgl. p. 278, (18.)]. | wo die A noch *unbekannte* Constanten sind.

All' diese Formeln beziehen sich auf Puncte *innerhalb* der gegebenen Kugel; und alle Summationen sind nach dem betreffenden Index (j oder n) von 0 bis ∞ ausgedehnt. Es handelt sich nun darum, mittelst dieser Zusammenstellung, jene noch *unbekannten* Constanten A wirklich zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sind die $\mathfrak{B}$ in die $\mathfrak{W}$, und umgekehrt die $\mathfrak{W}$ in die $\mathfrak{B}$ zu transformiren. Die betreffenden Transformationsformeln lauten, wie später gezeigt werden soll, folgendermassen:

(10.) $$\mathfrak{B}_j = \sum_n \gamma_n^j \mathfrak{W}_n, \qquad \mathfrak{W}_n = \sum_j \beta_j^n \mathfrak{B}_j,$$

wo die γ und β gewisse *Constanten* sind. Substituirt man diese Werthe der $\mathfrak{W}$ in die Formel (8.) *rechter* Hand, d. i. in die Formel:

(α.) $$V = \sum_p A_p \mathfrak{W}_p,$$

indem man gleichzeitig p für n setzt, so erhält man:

(β.) $$V = \sum_p \sum_j A_p \beta_j^p \mathfrak{B}_j.$$

Diese letzte Formel drückt das V als eine Function der $\mathfrak{B}_j$ aus, und ist also analog mit der Formel (8.) *linker* Hand. Demgemäss ergiebt sich, auf Grund der Formel (9.) *linker* Hand, für das *inducirte* Potential Q der Werth:

(γ.) $$Q = -\sum_p \sum_j \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} A_p \beta_j^p \mathfrak{B}_j,$$

oder, falls man hier für die $\mathfrak{B}$ ihre Werthe (10.) substituirt:

(δ.) $$Q = -\sum_p \sum_j \sum_n \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} A_p \beta_j^p \gamma_n^j \mathfrak{W}_n.$$

Diese letzte Formel (δ.) drückt das Q als Function der $\mathfrak{W}$ aus, und muss also identisch sein mit der Formel (9.) *rechter* Hand. Durch Vergleichung der beiden Formeln ergiebt sich daher:

(11.) $$A_n = -\sum_p \sum_j \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} A_p \beta_j^p \gamma_n^j,$$

oder ausführlicher geschrieben:

(12.) $$A_n = \Delta_0^n A_0 + \Delta_1^n A_1 + \cdots + \Delta_p^n A_p + \cdots,$$

wo die Δ die Werthe besitzen:

(13.) $$\Delta_p^n = -\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{j\lambda\delta}{j+\delta} \beta_j^p \gamma_n^j.$$

Und diese Formel (12.) *repräsentirt also die Auflösung des in Rede stehenden Systems von Gleichungen* (1.), *resp.* (4.). Es bleibt nur noch übrig die in (12.) oder vielmehr in (13.) enthaltenen Constanten β, γ zu bestimmen; das soll im folgenden § geschehen. Doch mag schon hier das schliessliche Resultat dieser Untersuchung mitgetheilt werden. Wir werden die Werthe der β, γ berechnen, und finden, dass die Formel (13.) bei Substitution dieser Werthe die Gestalt annimmt:

$$(14.)\qquad \Delta_p^n = -(1-q^2)q^{2p}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{j\lambda\delta}{j+\delta}q^{2j}O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right)O_{pj}\left(\frac{1}{qq}\right),$$

wo die $O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right)$ und $O_{pj}\left(\frac{1}{qq}\right)$ gewisse Functionen von $\frac{1}{qq}$, also von q vorstellen, auf welche *später* genauer einzugehen sein wird. Vgl. p. 307.

§ 12.

Ueber die Transformation von den monopolaren Coordinaten auf die dipolaren, und umgekehrt.

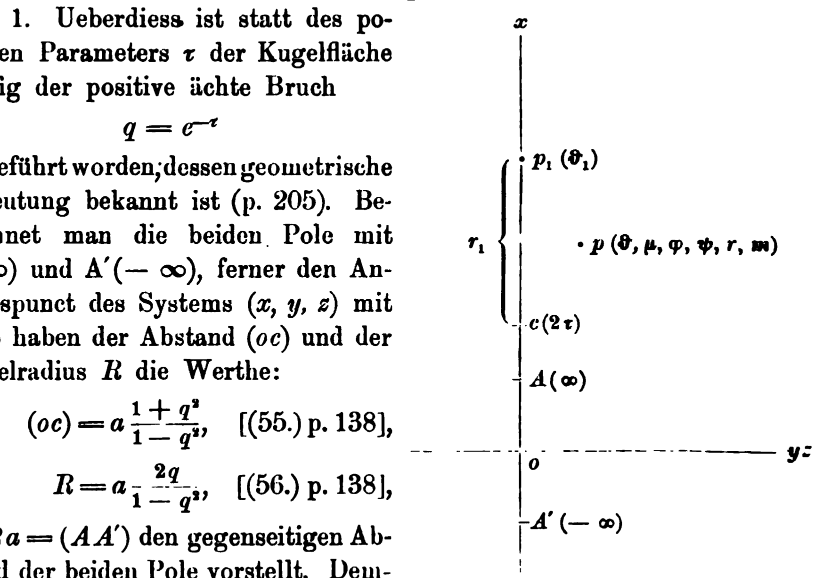
Das Centrum c der gegebenen Kugelfläche (τ) befindet sich auf der positiven x-Axe, und besitzt die dipolaren Coordinaten $\vartheta = 2\tau$ und $\mu = 1$. Ueberdiess ist statt des positiven Parameters τ der Kugelfläche häufig der positive ächte Bruch

$$(1.)\qquad q = e^{-\tau}$$

eingeführt worden; dessen geometrische Bedeutung bekannt ist (p. 205). Bezeichnet man die beiden Pole mit $A(\infty)$ und $A'(-\infty)$, ferner den Anfangspunct des Systems (x, y, z) mit o, so haben der Abstand (oc) und der Kugelradius R die Werthe:

$$(2.)\qquad \begin{aligned}(oc) &= a\frac{1+q^2}{1-q^2}, \quad [(55.)\ \text{p. } 138],\\ R &= a\frac{2q}{1-q^2}, \quad [(56.)\ \text{p. } 138],\end{aligned}$$

wo $2a = (AA')$ den gegenseitigen Abstand der beiden Pole vorstellt. Demgemäss ergiebt sich [vgl. die beistehende Figur]:



$$(Ac) = (oc) - a,$$
$$(A'c) = (oc) + a,$$

oder, falls man für (oc) den Werth (2.) einsetzt:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} (Ac) &= a\,\frac{2q^2}{1-q^2}, \quad \text{d. i.} = qR, \\ (A'c) &= a\,\frac{2}{1-q^2}, \quad \text{d. i.} = \frac{R}{q}, \end{aligned}$$

mithin z. B.:

$$(4.)\qquad \frac{(Ac)}{(A'c)} = q^2.$$

Dies vorangeschickt, betrachten wir einen *beliebigen* Raumpunct p (ϑ, μ, φ, ψ), und bezeichnen die dem Centrum c und der x-Axe entsprechenden monopolaren Coordinaten desselben mit (r, m, φ) der Art, dass r den Abstand des Punctes von c, und m den Cosinus desjenigen Winkels w vorstellt, unter welchem r gegen die positive Axe geneigt ist. *Wir stellen uns die Aufgabe, die Function*

$$(5.)\qquad \mathfrak{B}_j = r^j P_j(\cos w) = r_j P_j(m)$$

auszudrücken durch die dipolaren Coordinaten (ϑ, μ, φ, ψ) *des betrachteten Punctes* p. *Doch wollen wir dabei der Bequemlichkeit willen annehmen, dieser Punct* p *liege stets oberhalb der* yz*-Ebene, sodass also seine Coordinate* ϑ *stets positiv bleibt.*

Zur Lösung der Aufgabe benutzen wir (vgl. die Figur) einen auf der positiven x-Axe in *sehr grosser* Entfernung befindlichen *auxiliaren Punct* p_1; sodass wir also im Ganzen zwei variable Puncte haben, nämlich:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \quad\; p \text{ mit den Coordinaten } \vartheta, \mu, \varphi, \psi \text{ und } r, m, \varphi, \\ \text{und } p_1 \text{ mit den Coordinaten } \vartheta_1, 1, *, \psi_1 \text{ und } r_1, 1, *. \end{cases}$$

Demgemäss erhalten wir für den gegenseitigen Abstand (pp_1) dieser Puncte die Formel:

$$(7.)\qquad \frac{1}{(pp_1)} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{r^j}{r_1^{j+1}} P_j(m),$$

und andererseits auch die Formel:

$$(8.)\qquad \frac{1}{(pp_1)} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{N(\vartheta_1-\vartheta)} P_n(\mu), \quad \text{(vgl. p. 110).}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Formeln (7.), (8.), falls man nur beachtet, dass p *oberhalb* der yz-Ebene, und andererseits p_1 auf der *positiven* x-Axe in *superlativer* Entfernung liegen soll. Bedient man sich der Bezeichnung (5.), und setzt man ausserdem:

$$(9.)\qquad \mathfrak{W}_n = \sqrt{\psi}\, e^{-N\vartheta} P_n(\mu),$$

so kann man die Formeln (7.), (8.) auch so schreiben:

(10.)
$$\frac{1}{(pp_1)} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(\frac{1}{r_1}\right)^{j+1} \mathfrak{V}_j,$$

(11.)
$$\frac{1}{(pp_1)} = \sum_{n=0}^{n=8} \left(\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1}\right) \mathfrak{W}_n;$$

und durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke muss es möglich sein, die $\mathfrak{V}$ *durch die* $\mathfrak{W}$ *darzustellen, und somit die gestellte Aufgabe zu lösen.*

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung $(Ap_1) = \varrho$ und $(A'p_1) = \varrho'$, so ist bekanntlich:

(12.)
$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\varrho'}} \quad \text{und} \quad e^{\vartheta_1} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \quad \text{[vgl. p. 105, (23.)]},$$

mithin:

(13.)
$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\varrho'}} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^N = \frac{\varrho'^n}{\varrho^{n+1}};$$

denn es ist $N = n + \frac{1}{2}$. Aus der geometrischen Bedeutung von ϱ und ϱ' ergiebt sich aber $\varrho = (Ap_1) = (Ac) + r_1$ [vgl. die Figur], und ebenso: $\varrho' = (A'p_1) = (A'c) + r_1$. Somit folgt:

(14.)
$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1} = \frac{[(A'c) + r_1]^n}{[(Ac) + r_1]^{n+1}} = \frac{\left[1 + \frac{(A'c)}{r_1}\right]^n}{r_1\left[1 + \frac{(Ac)}{r_1}\right]^{n+1}},$$

oder, falls man für $(A'c)$ den aus (4.) entspringenden Werth substituirt:

(15.)
$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1} = \frac{\left[1 + \frac{(Ac)}{r_1}\frac{1}{qq}\right]^n}{r_1\left[1 + \frac{(Ac)}{r_1}\right]^{n+1}}.$$

Der hier auf der *rechten* Seite stehende Ausdruck hat, bei Fortlassung des Divisors r_1, die Gestalt:

(A.)
$$\frac{(1-\beta x)^n}{(1-\beta)^{n+1}},$$

wo β einen *ächten Bruch* vorstellt*). Denkt man sich diesen Ausdruck (A.) nach Potenzen von β entwickelt, so werden die auftretenden Coefficienten nur noch Functionen von x sein. Wir bezeichnen diese Func-

---

*) Setzt man nämlich den Quotienten $-\frac{(Ac)}{r_1} = \beta$, so ist in der That β ein sehr kleiner *ächter Bruch*, weil der Punct p_1 in ungemein grosser Entfernung sich befindet, mithin r_1 von exorbitanter Grösse ist [vgl. die Figur p. 300].

tionen mit $O(x)$, oder genauer mit $O_n^j(x)$, und schreiben demgemäss die in Rede stehende Entwicklung folgendermassen:

$$\text{(B.)} \qquad \frac{(1-\beta x)^n}{(1-\beta)^{n+1}} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta^j O_n^j(x).$$

Multiplicirt man diese Formel mit α^n, wo α ein *beliebig* gewählter *ächter Bruch* sein soll, und summirt sodann über $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, so erhält man:

$$\frac{1}{1-\beta} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\alpha(1-\beta x)}{1-\beta}\right)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{j=0}^{j=\infty} \alpha^n \beta^j O_n^j(x),$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{(C.)} \qquad \frac{1}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{j=0}^{j=\infty} \alpha^n \beta^j O_n^j(x).$$

Aus dieser Formel (C.) erkennt man sofort, dass die Function $O_n^j(x)$ in Bezug auf n und j *symmetrisch*, dass also

$$\text{(D.)} \qquad O_n^j(x) = O_j^n(x) = O_{nj}(x) = O_{jn}(x)$$

ist. In der That sollen die hier in (D.) angegebenen Bezeichnungen weiterhin *promiscue* gebraucht werden, je nach der augenblicklichen Bequemlichkeit. Auch folgt aus der durch (B.) gegebenen Definition der Functionen O sofort, dass z. B.

$$\text{(E.)} \qquad O_0^j(x) \textit{ identisch } = 1 \text{ ist.}$$

Dies eingeschaltet, kann man nun die Formel (15.), mit Rücksicht auf (B.), (D.), auch so schreiben:

$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1} = \frac{1}{r_1} \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(-\frac{(Ac)}{r_1}\right)^j \cdot O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right),$$

oder, weil $(Ac) = Rq$ ist (3.), auch so:

$$\frac{\sqrt{\psi_1}}{2a} e^{N\vartheta_1} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{(-Rq)^j}{r_1^{j+1}} \cdot O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right).$$

Dies in (11.) substituirt, erhält man:

$$\frac{1}{(pp_1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{(-Rq)^j}{r_1^{j+1}} \cdot O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \mathfrak{W}_n.$$

Vergleicht man aber diese letzte Formel mit der früheren Formel (10.), so ergiebt sich, weil zwischen beiden für *beliebige* Werthe des (exorbitant grossen) r_1 Uebereinstimmung stattfinden muss:

$$\text{(16.)} \qquad \mathfrak{V}_j = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-Rq)^j O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \mathfrak{W}_n,$$

oder einfacher geschrieben:

$$(17.)\qquad \mathfrak{B}_j = (-Rq)^j \sum_{n=0}^{n=\infty} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right)\cdot \mathfrak{W}_n.$$

Nachdem wir in (17.) *die* $\mathfrak{B}$ *durch die* $\mathfrak{W}$ *ausgedrückt haben, wollen wir jetzt umgekehrt die* $\mathfrak{W}$ *durch die* $\mathfrak{B}$ *darzustellen versuchen.* Zufolge der Bemerkungen bei (12.), (13.), (14.) ist:

$$e^{\vartheta_1} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{(A'p_1)}{(Ap_1)} = \frac{(A'c)+r_1}{(Ac)+r_1},$$

folglich:

$$[(Ac)+r_1]e^{\vartheta_1} = (A'c)+r_1,$$

oder, falls man diese Gleichung nach r_1 auflöst:

$$r_1 = -\frac{(A'c)-(Ac)e^{\vartheta_1}}{1-e^{\vartheta_1}},$$

oder, weil nach (3.) $(A'c) = \frac{R}{q}$ und $(Ac) = Rq$ ist:

$$r_1 = -\frac{R}{q}\,\frac{1-q^2e^{\vartheta_1}}{1-e^{\vartheta_1}},$$

mithin z. B.:

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^{j+1} = \left(-\frac{q}{R}\right)^{j+1}\left(\frac{1-e^{\vartheta_1}}{1-q^2e^{\vartheta_1}}\right)^{j+1}.$$

Multiplicirt man dies mit der bekannten Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_1}} = -e^{\frac{\vartheta_1}{2}}\,\frac{1}{1-e^{\vartheta_1}},\qquad \text{[vgl. } (\alpha.) \text{ p. 103]},$$

so folgt:

$$(18.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{1}{r_1}\right)^{j+1} = e^{\frac{\vartheta_1}{2}}\,\frac{q}{R}\left(-\frac{q}{R}\right)^j\left[\frac{(1-e^{\vartheta_1})^j}{(1-q^2e^{\vartheta_1})^{j+1}}\right].$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{\left(1-q^2e^{\vartheta_1}\,\frac{1}{qq}\right)^j}{(1-q^2e^{\vartheta_1})^{j+1}},\ {}^{*})$$

und ist daher nach (A.), (B.), (C.), (D.) p. 302 in die Reihe entwickelbar:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(q^2e^{\vartheta_1})^n\,.\,O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right).$$

---

*) In diesem Ausdruck ist ϑ_1 nahe $= 0$, weil der Punct p_1 äusserst weit entfernt sein soll. Folglich ist daselbst das Product $q^2e^{\vartheta_1}$ nahezu $= q^2$, mithin ein *ächter Bruch*.

Somit folgt aus (18.):

$$(19.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{1}{r_1}\right)^{j+1} = \frac{q}{R}\left(-\frac{q}{R}\right)^j \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{2n} e^{N\vartheta_1} \cdot O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right),$$

wo $N = n + \frac{1}{2}$ ist. Substituirt man diesen Werth (19.) in die Entwicklung (10.):

$$\frac{1}{(pp_1)\sqrt{\psi_1}} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{1}{r_1}\right)^{j+1} \mathfrak{B}_j,$$

so erhält man:

$$(20.)\qquad \frac{1}{(pp_1)\sqrt{\psi_1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{q}{R}\left(-\frac{q}{R}\right)^j q^{2n} e^{N\vartheta_1} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \mathfrak{B}_j.$$

Vergleicht man jetzt diese letzte Formel (20.) mit der früheren Formel (11.):

$$\frac{1}{(pp_1)\sqrt{\psi_1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \left(\frac{1}{2a} e^{N\vartheta_1}\right) \mathfrak{W}_n,$$

und beachtet man, dass beide Formeln mit einander übereinstimmen müssen für *beliebige* Werthe der sehr kleinen Coordinate ϑ_1 des exorbitant weit entfernten Punctes p_1, so ergiebt sich sofort:

$$(21.)\qquad \mathfrak{W}_n = \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{2aq}{R}\left(-\frac{q}{R}\right)^j q^{2n} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \mathfrak{B}_j;$$

oder besser geordnet, und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{2aq}{R} = (1 - q^2)$ ist [vgl. (2.)]:

$$(22.)\qquad \mathfrak{W}_n = (1 - q^2)q^{2n} \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(-\frac{q}{R}\right)^j O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \mathfrak{B}_j.$$

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat: *Bezeichnet man für irgend einen Punct* $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ *die auf* p. 301 *besprochenen monopolaren Coordinaten mit* (r, m, φ), *und setzt man zur Abkürzung:*

$$(23.)\qquad \mathfrak{B}_j = r^j P_j(m), \qquad \mathfrak{W}_n = \sqrt{\psi}\, e^{-N\vartheta} P_n(\mu),$$

so finden zwischen diesen Functionen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ *folgende Beziehungen statt:*

$$(24.)\qquad \mathfrak{B}_j = (-Rq)^j \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \mathfrak{W}_n, \quad \text{[nach (17.)]},$$

$$(25.)\qquad \mathfrak{W}_n = (1 - q^2)q^{2n} \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(-\frac{q}{R}\right)^j O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \mathfrak{B}_j, \qquad \text{[nach (22.)]},$$

wo die O_{nj} *die in* (A.), (B.), (C.), (D.) p. 302 *definirten Functionen vorstellen. Doch ist bei der Ableitung dieser Formeln* (24.), (25.) *die Voraussetzung gemacht worden, dass der betrachtete Punct* $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ *oder* (r, m, φ) ***oberhalb*** *der yz-Ebene liege, dass mithin seine Coordinate* ϑ

positiv und nicht gleich Null sei. Zur Abkürzung kann man nun diese Formeln (24.), (25.) *etwa so schreiben:*

$$\text{(26.)}\qquad \mathfrak{B}_j = \sum_{n=0}^{n=\infty} \gamma_n^j \mathfrak{W}_n,$$

$$\text{(27.)}\qquad \mathfrak{W}_n = \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^n \mathfrak{B}_j;$$

wie solches z. B. früher in (10.) p. 299 *bereits geschehen ist. Und hieraus folgt, dass die damals eingeführten Constanten* γ, β *die Werthe haben:*

$$\text{(28.)}\qquad \gamma_n^j = (-Rq)^j O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right),$$

$$\text{(29.)}\qquad \beta_j^n = (1-q^2)q^{2n}\left(-\frac{q}{R}\right)^j O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right).$$

Bildet man also z. B. statt β_j^n *das* β_j^p, *und multiplicirt dieses mit* γ_n^j, *so folgt:*

$$\text{(30.)}\qquad \beta_j^p \gamma_n^j = (1-q^2)q^{2p+2j} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) O_{pj}\left(\frac{1}{qq}\right).$$

An die letzten Formeln schliesst sich fast von selber eine wichtige Bemerkung an. Aus (27.) erhält man nämlich (p statt n gesetzt):

$$\mathfrak{W}_p = \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^p \mathfrak{B}_j;$$

also, falls man für $\mathfrak{B}_j$ den Werth (26.) substituirt:

$$\mathfrak{W}_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^p \gamma_n^j \mathfrak{W}_n,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\mathfrak{W}_p = \mathfrak{W}_0\left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^p \gamma_0^j\right) + \mathfrak{W}_1\left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^p \gamma_1^j\right) + \cdots\cdots$$

Hier nun müssen die Coefficienten der $\mathfrak{W}$ zu beiden Seiten einander *gleich* sein. Somit ergiebt sich also, dass

$$\text{(31.)}\qquad \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta_j^p \gamma_n^j = 1, \quad \text{oder } = 0 \text{ ist,}$$

je nachdem n gleich p, oder von p verschieden. Substituirt man aber hier in (31.) für das Product $\beta_j^p \gamma_n^j$ den Werth (30.), *so gelangt man zu dem Satz, dass*

$$\text{(32.)}\qquad \sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) O_{pj}\left(\frac{1}{qq}\right) = \frac{1}{q^{2p}(1-q^2)}, \quad \textit{oder } = 0 \textit{ ist,}$$

je nachdem n gleich p, oder von p verschieden.

Gleichzeitig ergeben sich für die früher erwähnten Constanten:

(33.) $$\Delta_p^n = -\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{j\lambda\delta}{j+\delta}\, \beta_j^p \gamma_n^j,$$ [vgl. (13.) p, 299],

mittelst der Formel (30.) *die definitiven Werthe:*

(34.) $$\Delta_p^n = -(1-q^2)q^{2p} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{j\lambda\delta}{j+\delta}\, q^{2j} O_{nj}\left(\frac{1}{qq}\right) O_{pj}\left(\frac{1}{qq}\right).$$

Ausserdem aber ergiebt sich aus (32.), um einen *Heine*'schen Ausdruck zu brauchen, *dass die O die Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind. Ist nämlich zwischen zwei Grössensystemen* X_0, X_1, X_2, ... *in inf., und* Y_0, Y_1, Y_2, ... *in inf., ein System von Gleichungen gegeben von der Form:*

(35.) $$X_j = \sum_{n=0}^{n=\infty} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot Y_n, \text{*)}$$

so lässt sich dasselbe sofort umkehren. In der That ergiebt sich aus (32.), *dass diese Umkehrung folgendermassen lautet:*

(36.) $$Y_n = q^{2n}(1-q^2) \sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_j^n\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot X_j.$$

Beweis. — Versteht man unter p eine bestimmte feste Zahl, und multiplicirt man die Gleichung (35.) mit $q^{2j} O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right)$, und summirt hierauf nach j von 0 bis ∞, so folgt:

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot X_j = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(Y_n \sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right)\right).$$

Die hier auf der rechten Seite stehende *innere* Summe ist aber nach (32.) stets $=0$, ausser für $n=p$, und in diesem Fall $=\frac{1}{q^{2p}(1-q^2)}$. Somit folgt:

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot X_j = Y_p \cdot \frac{1}{q^{2p}(1-q^2)}.$$

Dies aber ist, falls man den Buchstaben p mit n vertauscht, die zu beweisende Formel (36.). *Q. e. d.*

---

*) Zwischen O_{nj}, und O_n^j oder O_j^n findet keinerlei Unterschied statt. Vgl. (D.) p. 303. Je nach der augenblicklichen Bequemlichkeit soll daher bald diese, bald jene Schreibweise gebraucht werden.

Vervollständigung der erhaltenen Formeln. — Nach (24.), (25.) ist, falls man für die $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ ihre eigentlichen Bedeutungen (23.) einsetzt:

$$\begin{cases} (37.\text{a}) \quad r^j P_j(m) = (-Rq)^j \sum_{n=0}^{n=\infty} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \sqrt{\psi} e^{-N\vartheta} P_n(\mu), \\ (37.\text{b}) \quad \sqrt{\psi} e^{-N\vartheta} P_n(\mu) = (1-q^2) q^{2n} \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(-\frac{q}{R}\right)^j O_j^n\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot r^j P_j(m); \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass die *eine* dieser beiden Formeln aus der *andern* durch Umkehrung abgeleitet werden kann, mittelst des Satzes (35.), (36.). Lässt man den variablen Punct (r, m, φ) oder $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ *auf die gegebene Kugelfläche* (τ) fallen, mithin r in R, und $e^{-\vartheta}$ in $e^{-\tau} = q$ übergehen, so nehmen die Formeln (37. a, b) folgende speciellere Gestalt an:

$$\begin{cases} (38.\text{a}) \quad P_j(m) = (-q)^j \sum_{n=0}^{n=\infty} q^N O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot \sqrt{\psi} P_n(\mu), \\ (38.\text{b}) \quad \sqrt{\psi} P_n(\mu) = \frac{1-q^2}{q} q^N \sum_{j=0}^{j=\infty} (-q)^j O_j^n\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot P_j(m). \end{cases}$$

Den Formeln (37. a, b) stehen nun *andere* zur Seite, die sich aus ihnen leicht ableiten lassen durch Differentiation nach r. Wollte man eine solche Differentiation nach r ausführen bei *beliebiger* Lage des Punctes (r, m, φ), so würden, ausser r selbst, gleichzeitig auch ϑ und μ sich ändern. Einfacher gestalten sich die Dinge, wenn jener Punct *auf der gegebenen Kugelfläche* (τ), oder wenigstens derselben *unendlich nahe* gedacht wird. Denn alsdann wird eine kleine Aenderung von r nur das ϑ, nicht aber das μ afficiren. Bei der genannten Lage des Punctes ergiebt sich also z. B. aus (37. a) durch Differentiation nach r:

$$(\text{f.}) \qquad jR^{j-1} P_j(m) = (-Rq)^j \sum_{n=0}^{n=\infty} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot L_n P_n(\mu),$$

wo L_n die Bedeutung hat:

$$L_n = \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sqrt{\psi} e^{-N\vartheta}\right) \cdot \frac{d\vartheta}{dr}\right]_{\vartheta=\tau}.$$

Hieraus folgt, weil $\psi = (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\mu)$ und $\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\psi}{2a}$ ist [(33.) p. 109]:

$$L_n = \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\psi}}(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) e^{-N\vartheta} - \sqrt{\psi} N e^{-N\vartheta}\right)\left(-\frac{\psi}{2a}\right)\right]_{\vartheta=\tau};$$

oder, falls man den Werth $\vartheta = \tau$ wirklich eintreten, mithin $e^{-\vartheta}$ in $e^{-\tau} = q$ übergehen lässt, und überdiess für $\frac{1}{2a}$ den aus (2.) p. 300 resultirenden Werth $\frac{q}{R(1-q^2)}$ substituirt:

$$L_n = \frac{q}{R(1-q^2)}\left(-\sqrt{\psi}\,\frac{1-q^2}{2q}\,q^N + \psi\sqrt{\psi}\,Nq^N\right),$$

$$\text{d. i. } L_n = -\frac{\sqrt{\psi}}{2R}\,q^N + \frac{q\psi\sqrt{\psi}}{R(1-q^2)}\,Nq^N.$$

Dies in (f.) substituirt, erhält man:

$$\text{(g.)}\quad jP_j(m) = (-q)^j\left(-\tfrac{1}{2}\sum O_n^j q^N \sqrt{\psi}\,P_n(\mu) + \frac{q}{1-q^2}\sum O_n^j N q^N \psi\sqrt{\psi}\,P_n(\mu)\right),$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung das Argument $\frac{1}{qq}$ der Function O unterdrückt ist. Bei eben derselben Bezeichnungsweise aber ist nach Formel (38. a):

$$\text{(h.)}\qquad P_j(m) = (-q)^j \sum O_n^j q^N \sqrt{\psi}\,P_n(\mu).$$

Multiplicirt man jetzt die Formeln (g.) und (h.) respective mit 1 und $\frac{1}{2}$, und addirt, so erhält man die erste der beiden folgenden Formeln:

$$\text{(39. a)}\qquad JP_j(m) = \frac{q(-q)^j}{1-q^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} Nq^N O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)\psi\sqrt{\psi}\,P_n(\mu),$$

$$\text{(39. b)}\qquad N\psi\sqrt{\psi}\,P_n(\mu) = q^N\left(\frac{1-q^2}{q}\right)^2 \cdot \sum_{j=0}^{j=\infty} J(-q)^j O_j^n\left(\frac{1}{qq}\right)P_j(m);$$

wo J zur Abkürzung steht für $j+\frac{1}{2}$, ebenso wie N für $n+\frac{1}{2}$. Aus (39. a) ergiebt sich (39. b) sofort durch Umkehrung, mittelst des Satzes (35.), (36.).

Bemerkung. — Das Flächenelement $d\sigma$ der gegebenen Kugel (τ) hat den Werth:

$$d\sigma = R^2 dm d\varphi = \frac{4a^2 d\mu d\varphi}{\psi^2}, \qquad \text{[vgl. (32.) p. 108].}$$

Nach (2.) p. 300 ist aber $2a = \frac{R(1-q^2)}{q}$. Somit folgt:

$$\text{(40.)}\qquad \frac{d\sigma}{R^2} = dm d\varphi = \left(\frac{1-q^2}{q}\right)^2 \frac{d\mu d\varphi}{\psi^2}.$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (38. a), (39. a) und (40.) mit einander, so erhält man eine Formel, in welcher die ψ sich fortheben. Integrirt man also diese Formel über alle Elemente der gegebenen Kugelfläche, so erhält man mittelst der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen:

$$2\pi = \left(\frac{1-q^2}{q}\right)^2 \frac{q^{2j+1}}{1-q^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)\right]^2 q^{2n+1} \cdot 2\pi,$$

oder was dasselbe ist:

$$(\alpha.)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{2n}\left[O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)\right]^2 = \frac{1}{(1-q^2)q^{2j}}.$$

Und operirt man andererseits, von (38. a), (39. a), (40.) ausgehend, genau in derselben Weise, nur mit dem Unterschiede, dass man in jenen beiden Formeln (38. a), (39. a) zwei *verschiedene* Zahlen j, etwa j und j_1 nimmt, so erhält man:

$$(\beta.)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{2n} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) O_n^{j_1}\left(\frac{1}{qq}\right) = 0.$$

Diese beiden Formeln (α.) und (β.) repräsentiren aber den schon früher gefundenen Satz (32.). Desgleichen führt auch die Multiplication von (38. b), (39. b) und (40.) zu keinem neuen Resultat.

Neue Resultate aber erhält man, wenn man z. B. zwei der Formeln (38. b), z. B.

$$\sqrt{\psi}\, P_n(\mu) = \frac{1-q^2}{q} q^n \sqrt{q} \sum_{j=0}^{j=\infty} (-q)^j O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot P_j(m),$$

$$\text{und } \sqrt{\psi}\, P_s(\mu) = \frac{1-q^2}{q} q^s \sqrt{q} \sum_{j=0}^{j=\infty} (-q)^j O_s^j\left(\frac{1}{qq}\right) \cdot P_j(m),$$

mit einander multiplicirt, überdiess noch mit

$$\frac{d\mu\, d\varphi}{\psi^2} = \left(\frac{q}{1-q^2}\right)^2 dm\, d\varphi, \qquad [\text{vgl. } (40.)],$$

multiplicirt, und schliesslich über die gegebene Kugelfläche integrirt. Man erhält alsdann, unter Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors 2π:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu) P_s(\mu) d\mu}{\psi} = q^{n+s+1} \sum_{j=0}^{j=\infty} q^{2j} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) O_s^j\left(\frac{1}{qq}\right) \frac{2}{2j+1},$$

oder, weil $\psi = 2(\cos i\tau) - 2\mu = 2\left(\frac{1+q^2}{2q} - \mu\right)$ ist:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu) P_s(\mu) d\mu}{\frac{1+q^2}{2q} - \mu} = q^{n+s+1} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{4}{2j+1} q^{2j} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) O_s^j\left(\frac{1}{qq}\right).$$

Die linke Seite dieser Formel hat aber, falls $s \leq n$ ist, den Werth:

$$P_s\left(\frac{1+q^2}{2q}\right) Q_n\left(\frac{1+q^2}{2q}\right),$$

wo Q_n die *Kugelfunction zweiter Art* und n^{ter} Ordnung vorstellt. Vgl. das Werk meines Vaters: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* Leipzig bei Teubner, 1878, p. 150. Somit ergiebt sich die vielleicht beachtenswerthe Entwicklung:

$$(41.)\quad P_s\left(\frac{1+q^2}{2q}\right)Q_n\left(\frac{1+q^2}{2q}\right)=q^{n+s+1}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{4}{2j+1}q^{2j}O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)O_s^j\left(\frac{1}{qq}\right),\ \text{für } s\leqq n.$$

Hieraus folgt z. B. für $s=0$:

$$(42.)\qquad Q_n\left(\frac{1+q^2}{2q}\right)=q^{n+1}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{4}{2j+1}q^{2j}O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right),\quad [\text{vgl. (E.) p. 303}],$$

und, falls man jetzt auch $n=0$ macht:

$$(43.)\qquad Q_0\left(\frac{1+q^2}{2q}\right)=q\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{4}{2j+1}q^{2j}.$$

Diese letzte Formel kann sofort verificirt werden. Denn nach der Definition von Q_0 ist bekanntlich:

$$Q_0(x)=\log\frac{x+1}{x-1}.\quad \text{U. s. w.}$$

Zweite Bemerkung. — Um von der *analytischen* Bedeutung der Transformationsformeln (37. a, b) eine Vorstellung zu geben, will ich noch Folgendes bemerken. Man kann die monopolaren Coordinaten r, m des betrachteten variablen Punctes leicht durch seine dipolaren Coordinaten ϑ, μ ausdrücken, und erhält alsdann

$$r=\frac{R}{q}\,\frac{\sqrt{p^2-2p\beta\mu+\beta^2}}{\sqrt{1-2\beta\mu+\beta^2}},$$

$$m=\frac{(1-\beta^2)-(1+p)(1-\beta\mu)}{\sqrt{1-2\beta\mu+\beta^2}\,\sqrt{p^2-2p\beta\mu+\beta^2}},$$

wo zur Abkürzung $e^{-\vartheta}=\beta$ und $q^2=p$ gesetzt ist. Substituirt man aber diese Werthe von r, m in (37. a), so ergiebt sich:

$$(44.)\qquad \frac{(p-2p\beta\mu+\beta^2)^{\frac{j}{2}}}{(1-2\beta\mu+\beta^2)^{\frac{j+1}{2}}}P_j\left(\frac{(1-\beta^2)-(1+p)(1-\beta\mu)}{\sqrt{1-2\beta\mu+\beta^2}\,\sqrt{p^2-2p\beta\mu+\beta^2}}\right)=$$

$$=(-p)^j\sum_{n=0}^{n=\infty}O_j^n\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\beta^n P_n(\mu),$$

eine Formel, in welcher p und β *beliebige* positive ächte Brüche vorstellen, während j irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Setzt man z. B. $j=0$, so folgt aus (44.) sofort:

$$(45.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\beta\mu+\beta^2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\beta^n P_n(\mu);\qquad [\text{vgl. (E.) p. 303}].$$

Und diese letzte Formel ist bekanntlich diejenige, welche als *Definition* der Kugelfunctionen P zu dienen pflegt.

§ 13.

Ueber den analytischen Ausdruck und die Eigenschaften der mit O bezeichneten Functionen.

Die Functionen O oder $O(x)$ sind von uns eingeführt worden in (A.), (B.), (C.), (D.) p. 302, mittelst der Entwicklung:

$$(1.)\qquad f = \frac{(1-\beta x)^n}{(1-\beta)^{n+1}} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \beta^j O_n^j(x),$$

wo β einen beliebigen *ächten Bruch* vorstellt. Von dieser Definition aus wird also der *analytische Ausdruck* der Functionen $O(x)$ zu eruiren sein. Wendet man die Reihe (1.) an auf den Specialfall $x = 1$, so ergiebt sich sofort:

$$(1.\ a)\qquad O_n^j(1) = 1.$$

Und ebenso ergiebt sich für den Specialfall $x = 0$:

$$(1.\ b)\qquad O_n^j(0) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+j)}{1.2\dots j} = \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n)\Pi(j)}.$$

Was den *allgemeinen* Fall betrifft, so kann der in (1.) auf der *linken* Seite stehende Ausdruck f offenbar auch so geschrieben werden:

$$f = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta x}{1-\beta}\right)^n,$$

oder auch so:

$$f = \frac{1}{1-\beta}\left(x + \frac{1-x}{1-\beta}\right)^n,$$

oder auch so:

$$(2.)\qquad f = \frac{x^n}{1-\beta}\left(1 + \frac{y}{1-\beta}\right)^n, \quad \text{wo } y = \frac{1-x}{x},$$

oder, falls man mittelst des Binomischen Satzes entwickelt, auch so:

$$(3.)\qquad f = x^n\left[\frac{1}{1-\beta} + \frac{n}{1}\frac{y}{(1-\beta)^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{y^2}{(1-\beta)^3} + \cdots\right].$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots\cdots\cdots + \beta^j + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-\beta)^2} = 1 + 2\beta + 3\beta^2 + \cdots\cdots + \frac{j+1}{1}\beta^j + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-\beta)^3} = 1 + 3\beta + 6\beta^2 + \cdots + \frac{(j+1)(j+2)}{1\cdot 2}\beta^j + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-\beta)^4} = 1 + 4\beta + \cdots + \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta^j + \cdots$$

etc. etc. etc.

Substituirt man dies in (3.), so erhält man eine nach Potenzen von β fortschreitende Entwicklung des Ausdruckes von f. Auch bemerkt man sofort, dass in dieser Entwicklung der Coefficient von β^j, d. i. [nach (1.)] die Function $O_n^j(x)$ den Werth besitzt:

$$(4.)\qquad O_n^j(x) = x^n \Big[1 + \frac{n}{1}\frac{j+1}{1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(j+1)(j+2)}{1\cdot 2}y^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \cdots\Big].$$

Setzt man also nach *Gauss*:

$$(5.)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,y) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}y^2 + \cdots$$

so hat man:

$$O_n^j(x) = x^n F(-n, j+1, 1, -y),$$

oder, falls man für y seine eigentliche Bedeutung [vgl. (2.)] substituirt:

$$(6.)\qquad O_n^j(x) = x^n F\left(-n, j+1, 1, \frac{x-1}{x}\right).$$

Mittelst der in *Gauss'* gesammelten Werken Bd. III, p. 218, Nr. [92.] gegebenen Transformationsformel kann dieser Ausdruck (6.) auch in folgende Gestalt versetzt werden:

$$(7.)\qquad O_n^j(x) = x^{n+j+1}F(n+1, j+1, 1, 1-x).$$

Unterwirft man endlich diese letzte Formel der am genannten Orte auf p. 213 in Nr. [87.] angegebenen Transformation, und nimmt man dabei Rücksicht auf die dortige Formel p. 148, Nr. [54], so erhält man:

$$(8.)\qquad O_n^j(x) = \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n)\cdot\Pi(j)}F\Big(-n, -j, -[n+j], x\Big),$$

wo z. B. das $\Pi(n) = 1.2.3.4\ldots.n$, und $\Pi(0) = 1$ ist. Aus (7.), wie aus (8.) ersieht man, dass $O_n^j(x) = O_j^n(x)$ ist; was in Uebereinstimmung steht mit der schon früher bei (D.) p. 303 gemachten Bemerkung. — Mittelst (8.) ergeben sich, falls man n successive $= 0$, $1, 2, 3, \ldots$ setzt, die Formeln:

$$(9.)\qquad \begin{cases} O_0^j(x) = 1, \\ O_1^j(x) = \frac{j+1}{1} - \frac{j}{1}x, \\ O_2^j(x) = \frac{(j+1)(j+2)}{1\cdot 2} - 2\frac{j(j+1)}{1\cdot 2}x + \frac{(j-1)j}{1\cdot 2}x^2, \\ O_3^j(x) = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 3\frac{j(j+1)(j+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x + 3\frac{(j-1)j(j+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 - \frac{(j-2)(j-1)j}{1\cdot 2\cdot 3}x^3, \end{cases}$$

etc. etc. etc.

Bringt man ferner auf den Ausdruck (7.) die in *Gauss'* Werken Bd. III, p. 130 in Nr. [1.] gegebene allgemeine Formel in Anwendung, so ergiebt sich für die Function $O_n^j(x)$ folgende *recurrente Eigenschaft*:

(10.) $$[(n+j+1)+(n-j)x]O_n^j(x) = (n+1)O_{n+1}^j(x) + nxO_{n-1}^j(x),$$

eine Formel, die durch etwas andere Anordnung der Glieder auch folgende Gestalt annimmt:

(11.) $$nx[O_n^j(x) - O_{n-1}^j(x)] - (n+1)[O_{n+1}^j(x) - O_n^j(x)] + j(1-x)O_n^j(x) = 0.$$

Ausser dieser recurrenten Eigenschaft haben aber die Functionen O noch merkwürdige *andere* Eigenschaften, die sich aus der *Gauss*'schen Abhandlung, überhaupt aus der allgemeinen Theorie der hypergeometrischen Reihe **nicht** direct entnehmen lassen. Es gelten nämlich folgende Sätze:

Setzt man:

(12.) $$A_{n,p} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^j O_n^j(x) O_p^j(x),$$

so wird:

(12. a) $$A_{p,p} = \frac{x^{p+1}}{x-1}$$

sein, während alle übrigen $A_{n,p}$ verschwinden.

Setzt man ferner:

(13.) $$B_{n,p} = \sum_{j=0}^{j=\infty} j \left(\frac{1}{x}\right)^j O_n^j(x) O_p^j(x),$$

so ergiebt sich:

(13. a) $$B_{p-1,p} = \frac{-px^{p+1}}{(x-1)^2}, \qquad B_{p,p} = \frac{(px+p+1)x^{p+1}}{(x-1)^2}$$

während alle übrigen $B_{n,p}$ gleich Null sind. Es verschwinden also sämmtliche Grössen $B_{n,p}$ mit Ausnahme derer, bei denen die Differenz der beiden Indices 0 oder 1 ist.

Setzt man ferner

(14.) $$C_{n,p} = \sum_{j=0}^{j=\infty} j^2 \left(\frac{1}{x}\right)^j O_n^j(x) O_p^j(x),$$

so wird man finden, dass sämmtliche Grössen $C_{n,p}$ verschwinden, mit alleiniger Ausnahme derer, bei denen die Differenz der beiden Indices 0 oder 1 oder 2 ist. U. s. w. U. s. w.

Der Beweis des Satzes (12.) ergiebt sich sofort aus der früheren Formel (32.) p. 306, falls man dort $q^2 = \frac{1}{x}$ setzt, und zugleich beachtet, dass $O_{nj} = O_n^j = O_j^n$ ist, vgl. (D.) p. 303.

Auf Grund dieses Satzes (12.) ergiebt sich sodann aber der *Beweis des nächstfolgenden Satzes* (13.), unter Anwendung der recurrenten Formel (11.). Nach dieser ist nämlich:

$$(x-1)jO_n^j(x) = (nx+n+1)O_n^j(x) - nxO_{n-1}^j(x) - (n+1)O_{n+1}^j(x).$$

Multiplicirt man nun diese Formel mit $\left(\frac{1}{x}\right)^j O_p^j(x)$, wo p eine beliebig gewählte ganze Zahl vorstellt, und summirt sodann über $j=0$, 1, 2, 3, ... ∞, so erhält man, unter Anwendung der in (12.), (13.) eingeführten Bezeichnungen:

$$(\alpha.)\quad (x-1)B_{n,p} = (nx+n+1)A_{n,p} - nxA_{n-1,p} - (n+1)A_{n+1,p}.$$

Hieraus folgt z. B. für $n=p-1$, und mit Rücksicht auf den schon bewiesenen Satz (12.):

$$(x-1)B_{p-1,p} = -pA_{p,p},$$

ferner für $n=p$:

$$(x-1)B_{p,p} = (px+p+1)A_{p,p},$$

oder, falls man für $A_{p,p}$ seinen Werth (12.a.) einsetzt:

$$(\beta.)\qquad B_{p-1,p} = \frac{-px^{p+1}}{(x-1)^2},$$

$$(\gamma.)\qquad B_{p,p} = \frac{(px+p+1)x^{p+1}}{(x-1)^2}.$$

Diese Formeln (β.), (γ.) sind aber die in (13.a.) angegebenen. Ueberdiess ergiebt sich aus (α.), dass diejenigen Grössen $B_{n,p}$, bei denen die Differenz der beiden Indices nicht 0 oder 1, sondern >1 ist, sämmtlich verschwinden. *Q. e. d.*

In analoger Art wird sich nun ferner aus dem Satze (13.) *der Beweis des Satzes* (14.) ergeben. U. s. w.

§ 14.

Ueber die Convergenz der angewendeten Reihen.

Es fragt sich z. B., ob die für die Δ aufgestellten Reihen (34.) p. 307 convergent sind. Um auf diese Frage näher einzugehen, sind die Werthe der Functionen $O(x)$ für das Argument $x=\frac{1}{qq}$ in Betracht zu ziehen, also für ein Argument x, *welches* >1 *ist.*

Substituirt man in der als Definition der $O(x)$ dienenden Formel

$$(1.)\qquad \left(\frac{1-\beta x}{1-\beta}\right)^n \frac{1}{1-\beta} = O_n^0(x) + \beta O_n^1(x)\cdots + \beta^j O_n^j(x) + \cdots$$

an Stelle des willkührlich zu wählenden ächten Bruches β den Ausdruck $\beta e^{i\varphi}$, wo $i = \sqrt{-1}$, so erhält man:

$$(2.)\quad \left(\frac{1-\beta x e^{i\varphi}}{1-\beta e^{i\varphi}}\right)^n \frac{1}{1-\beta e^{i\varphi}} = O_n^0(x) + \beta e^{i\varphi} O_n^1(x) \cdots + \beta^j e^{ij\varphi} O_n^j(x) + \cdots$$

Multiplicirt man jetzt diese Formel mit $e^{-ij\varphi}d\varphi$ und integrirt über $\varphi = 0 \ldots 2\pi$, so ergiebt sich:

$$(3.)\quad \beta^j O_n^j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\beta x e^{i\varphi}}{1-\beta e^{i\varphi}}\right)^n \frac{e^{-ij\varphi}d\varphi}{1-\beta e^{i\varphi}},$$

und folglich

$$\text{abs}\,(\beta^j O_n^j(x)) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M d\varphi,$$

wo M den Modul des in (3.) unter dem Integral befindlichen Ausdruckes vorstellt. Da nun β, x und φ reell sein sollen, so ist z. B.:

$$\text{mod}\,[1-\beta e^{i\varphi}] = \sqrt{(1-\beta\cos\varphi)^2 + (\beta\sin\varphi)^2} = \sqrt{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2};$$

und demgemäss erhält man:

$$(4.)\quad \text{abs}\,(\beta^j O_n^j(x)) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1-2\beta x\cos\varphi+\beta^2x^2}{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2}\right]^{\frac{n}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2}}.$$

In dieser Formel kann, ebenso wie in den früheren Formeln, für β jeder *beliebige* ächte Bruch genommen werden; und von dieser Erlaubniss soll sofort Gebrauch gemacht werden.

Der in (4.) in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck, *welcher seiner Natur nach stets positiv ist,* kann auch so geschrieben werden:

$$x^2 - \frac{(x-1)\,[(x+1)-2\beta x\cos\varphi]}{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2}.$$

oder falls man $\beta = \frac{x+1}{2x}$ macht, auch so:

$$x^2 - \frac{(x-1)(x+1)(1-\cos\varphi)}{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2}.$$

Hält man also fortan fest an dem eben genannten *speciellen Werthe von* β, und beachtet, dass $x > 1$ sein soll, so wird der stets positive Werth jenes in der eckigen Klammer enthaltenen Ausdrucks nothwendig kleiner als x^2 sein. Demgemäss folgt aus (4.) *a fortiori*:

$$(5.)\quad \text{abs}\,(\beta^j O_n^j(x)) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\beta\cos\varphi+\beta^2}}.$$

Und diese Ungleichheit wird noch weiter verstärkt werden, wenn man für die im Nenner stehende Quadratwurzel ihren kleinsten Werth, $1-\beta$ substituirt. Also ergiebt sich:

$$\text{(6.)}\qquad \operatorname{abs}(\beta^j O_n^j(x)) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^n d\varphi}{1-\beta} = \frac{x^n}{1-\beta},$$

oder falls man für β den vorhin erwählten Werth $\frac{x+1}{2x}$ wirklich einsetzt:

$$\text{(7.)}\qquad \operatorname{abs} O_n^j(x) < \frac{2x}{x-1}\left(\frac{x}{1}\right)^n\left(\frac{2x}{x+1}\right)^j.$$

Diese Formel (7.) *ist mithin gültig für jedwedes reelle Argument* x, *welches* >1 *ist.*

Um den Satz (7.) auf die anfangs erwähnte Frage anzuwenden, ist $x=\frac{1}{qq}$ zu setzen. Alsdann ergiebt sich:

$$\text{(8.)}\qquad \operatorname{abs} O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right) < \frac{2}{1-q^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{2n}\left(\frac{2}{1+q^2}\right)^j,$$

und ebenso, wenn man statt n irgend welche andere ganze Zahl p nimmt:

$$\text{(9.)}\qquad \operatorname{abs} O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right) < \frac{2}{1-q^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{2p}\left(\frac{2}{1+q^2}\right)^j.$$

Aus (8.), (9.) folgt sofort:

$$\text{(10.)}\qquad \operatorname{abs}\left[q^{2j}O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right)\right] < \left(\frac{2}{1-q^2}\right)^2\left(\frac{1}{q}\right)^{2n+2p}\left(\frac{2q}{1+q^2}\right)^{2j},$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{(11.)}\qquad q^{2j}O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right) = \Theta_{np}^j\left(\frac{2}{1-q^2}\right)^2\left(\frac{1}{q}\right)^{2n+2p}\left(\frac{2q}{1+q^2}\right)^{2j},$$

wo Θ_{np}^j einen nicht näher bekannten ächten Bruch vorstellt. Substituirt man nun diesen Ausdruck (11.) in die für Δ_p^n gefundene Reihe:

$$\text{(12.)}\qquad \Delta_p^n = -(1-q^2)q^{2p}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{j\lambda\delta}{j+\delta}q^{2j}O_n^j\left(\frac{1}{qq}\right)O_p^j\left(\frac{1}{qq}\right), \qquad \text{[p. 307]},$$

so erhält man:

$$\text{(13.)}\qquad \Delta_p^n = -\frac{4}{1-q^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{2n}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{j\lambda\delta}{j+\delta}\Theta_{np}^j\left(\frac{2q}{1+q^2}\right)^{2j}.$$

Hieraus aber ersieht man, dass die Reihe *convergirt.* Denn q ist ein positiver ächter Bruch; und Gleiches gilt daher auch von $\frac{2q}{1+q^2}$.

§ 15.

Wiederaufnahme des Chwolson'schen Problems.

Die Behandlung des Chwolson'schen Problems giebt für die unbekannten Constanten A_n, B_n zwei Systeme von Gleichungen, deren Auflösung auf abschreckende Schwierigkeiten stösst; wie im Vorhergehenden hinlänglich gezeigt ist. Doch bietet sich zur Absolvirung jenes Problems fast von selber ein gewisses *successives Verfahren* dar, bei welchem jeder Schritt mit Hülfe der schon vorhandenen Mittel *wirklich ausführbar* ist. Ich werde dieses successive Verfahren zunächst im Allgemeinen angeben, und sodann auf die Ausführbarkeit der einzelnen Schritte specieller mich einlassen.

Gegeben sind die beiden Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ mit ihren magnetischen Constanten $\varkappa$ und $\varkappa_0$, oder λ und λ_0, und ausserdem das *inducirende Potential V.* Man denke sich zuvörderst dasjenige Potential $\mathfrak{Q}$ berechnet, welches durch V in der Kugel $\mathfrak{K}$ inducirt werden würde, falls $\mathfrak{K}_0$ gar nicht vorhanden wäre; und andererseits auch dasjenige Potential $\mathfrak{Q}_0$ berechnet, welches durch V in $\mathfrak{K}_0$ inducirt werden würde, falls $\mathfrak{K}$ nicht vorhanden wäre. Diese $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ entsprechen alsdann den Gleichungen:

$$(\text{A.})\quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial n} + (1+\lambda)\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \nu} + \lambda\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0,\ [\lambda = 4\pi\varkappa, \text{ vgl. (2.) p. 283}],$$

$$(\text{A}_0.)\quad \frac{\partial \mathfrak{Q}_0}{\partial n} + (1+\lambda_0)\frac{\partial \mathfrak{Q}_0}{\partial \nu} + \lambda_0\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0,\ [\lambda_0 = 4\pi\varkappa_0],$$

wo die n die *äusseren*, die ν die *inneren* Normalen der beiden Kugeloberflächen vorstellen.

Das V ist beliebig gegeben. Und für jedes beliebig gegebene V können also die soeben definirten Potentiale $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ berechnet werden, entsprechend den Gleichungen (A.) und (A$_0$.). Jetzt bezeichne man mit $\mathfrak{R}$ denjenigen Werth, welchen $\mathfrak{Q}$ annehmen würde, falls $V = \mathfrak{Q}_0$ wäre, und mit $\mathfrak{R}_0$ den Werth, welchen $\mathfrak{Q}_0$ annehmen würde für $V = \mathfrak{Q}$. Diese $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ entsprechen alsdann den Gleichungen:

$$(\text{B.})\quad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial n} + (1+\lambda)\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \nu} + \lambda\frac{\partial \mathfrak{Q}_0}{\partial \nu} = 0,$$

$$(\text{B}_0.)\quad \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial n} + (1+\lambda_0)\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial \nu} + \lambda_0\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \nu} = 0.$$

Jetzt bezeichne man, zurückgehend zu den Formeln (A.), (A$_0$.), mit $\mathfrak{S}$ den Werth, welchen $\mathfrak{Q}$ annehmen würde für $V = \mathfrak{R}_0$, und mit $\mathfrak{S}_0$ den Werth, welchen $\mathfrak{Q}_0$ annehmen würde für $V = \mathfrak{R}$. Diese $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_0$ entsprechen alsdann den Gleichungen:

$$(\mathrm{C.})\qquad \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial n} + (1+\lambda)\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\nu} + \lambda\frac{\partial\mathfrak{R}_0}{\partial\nu} = 0,$$

$$(\mathrm{C}_0.)\qquad \frac{\partial\mathfrak{S}_0}{\partial n} + (1+\lambda_0)\frac{\partial\mathfrak{S}_0}{\partial\nu} + \lambda_0\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\nu} = 0.$$

U. s. w. U. s. w. Aus dieser Definition von $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_0$, etc. folgt übrigens sofort (vgl. den Satz p. 275), dass $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, etc. als Potentiale gewisser *Oberflächenbelegungen* der Kugel $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{S}_0$, etc. als Potentiale gewisser *Oberflächenbelegungen* der Kugel $\mathfrak{K}_0$ angesehen werden können.

Versteht man jetzt unter Q und Q_0 die Summen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} Q = \mathfrak{Q} + \mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \mathfrak{T} + \cdots \\ Q_0 = \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{T}_0 + \cdots, \end{cases}$$

so folgt durch Addition der Gleichungen (A.), (B.), (C.), etc. sofort:

$$(2.)\qquad \frac{\partial Q}{\partial n} + (1+\lambda)\frac{\partial Q}{\partial\nu} + \lambda\frac{\partial(V+Q_0)}{\partial\nu} = 0,$$

und andererseits durch Addition von (A_0.), (B_0.), (C_0.) etc..

$$(2_0.)\qquad \frac{\partial Q_0}{\partial n} + (1+\lambda_0)\frac{\partial Q_0}{\partial\nu} + \lambda_0\frac{\partial(V+Q)}{\partial\nu} = 0.$$

Und diese Gleichungen (2.), (2_0.) *zeigen, dass Q und Q_0 die eigentlich gesuchten Potentiale vorstellen, welche durch das gegebene V in den beiden Kugeln inducirt werden.* [Vgl. den Satz p. 283.]

Was nun die Ausführung der einzelnen Schritte, nämlich die successive Berechnung von $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, ... und $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{T}_0$, ... betrifft, so kann man dabei, falls man die dipolaren Coordinaten zu benutzen für gut findet, nach der Vorschrift des § 11 (p. 296—300) verfahren. Man hat alsdann zuvörderst die den beiden Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ zugehörigen *Constanten* q und q_0, deren geometrische Bedeutung früher [in (σ.) p. 205] angegeben wurde, zu berechnen. Sodann hat man die den Kugeln zugehörigen Constanten Δ, welche für $\mathfrak{K}$ mit Δ, für $\mathfrak{K}_0$ mit E bezeichnet werden mögen, zu berechnen mittelst der Formeln:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Delta_p^n = -(1-q^2)q^{2p}\sum\limits_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{j\lambda\delta}{j+\delta}q^{2j}O_n^j\left(\dfrac{1}{qq}\right)O_p^j\left(\dfrac{1}{qq}\right), \\ \mathsf{E}_p^n = -(1-q_0^2)q_0^{2p}\sum\limits_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{j\lambda_0\delta_0}{j+\delta_0}q_0^{2j}O_n^j\left(\dfrac{1}{q_0q_0}\right)O_p^j\left(\dfrac{1}{q_0q_0}\right), \end{cases}$$

[vgl. (14.) p. 300], wo $\delta = \dfrac{1}{2+\lambda}$ und $\delta_0 = \dfrac{1}{2+\lambda_0}$ ist [(18.) p. 278].

Dies ausgeführt gedacht, bestimmen sich alsdann z. B. die Coefficienten A des Potentiales $\mathfrak{Q}$ aus den Coefficienten A des gegebenen Potentiales V mittelst der Gleichungen

$$(4.)\qquad A_n = \Delta_0^n \mathsf{A}_0 + \Delta_1^n \mathsf{A}_1 + \Delta_2^n \mathsf{A}_2 + \cdots \text{ [vgl. (12.) p. 299];}$$

und in ähnlicher Weise werden sich andererseits die Coefficienten des Potentiales $\mathfrak{Q}_0$ aus denen des gegebenen Potentiales V bestimmen mittelst der E's.

In ganz ähnlicher Weise werden sich sodann die Coefficienten der Potentiale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ aus denen der Potentiale $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ bestimmen lassen, und zwar unter Anwendung *ebenderselben* Constanten Δ und E. U. s. w. U. s. w.

Diese Methode des *successiven Verfahrens* ist jedenfalls ihrem Princip nach eine sehr einfache. Auch dürfte es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass bei der praktischen Anwendung dieser Methode der hier angedeutete Gebrauch des *dipolaren* Coordinatensystems empfehlenswerther ist als etwa der alternirende Gebrauch zweier monopolaren Coordinatensysteme.





